O dobrym porządku pisze

prof. dr Andrzej MOSTOWSKI, członek rzeczywisty PAN

Z pierwszej części tego artykułu, zamieszczonej w numerze 2, mógł Czytelnik się dowiedzieć, co to takiego jest porządek i jaki porządek nazywamy dobrym. Sama jednak definicja nie pozwala w pełni zorientować się, czym są zbiory dobrze uporządkowane. Oto kilka własności i zastosowań tego pojęcia:

1. Liczby porządkowe. Postarajmy się najpierw uzmysłowić sobie strukturę zbioru dobrze uporządkowanego A. Jeśli jest on niepusty, to ma element pierwszy, nazwijmy go x_0. Jeśli w A są jeszcze inne jakieś elementy, to tworzą one podzbiór A, który ma element najwcześniejszy, oczywiście różny od x_0; nazwiemy go x_1. Jeśli x_0 i x_1 jeszcze nie wyczerpują zbioru A, to jest w A element najwcześniejszy różny od x_0 i x_1; nazwiemy go x_2 itd. Postępowanie to kończy się po skończonej liczbie n kroków, o ile zbiór A jest skończony i ma n elementów. Zbiór A składa się wtedy z elementów $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ uporządkowanych tak, że $x_0 \leqslant_R x_1 \leqslant_R \ldots \leqslant_R x_{n-1}$.
Jeśli zbiór A nie jest skończony, to ma on elementy $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ dla każdego naturalnego n, uporządkowane tak jak liczby całkowite nieujemne, tj. tak, że $x_0 \leqslant_R x_1 \leqslant_R x_2 \leqslant_R \ldots \leqslant_R x_n \leqslant_R \ldots$. Elementy te mogą wyczerpywać cały zbiór A; mówimy wtedy, że ma on typ ω; są jednak i takie zbiory, w których istnieją dalsze elementy w ilości skończonej lub nie. Za wszystkimi elementami x następuje wtedy nowy element x_ω, za nim dalszy, oznaczany przez $x_{\omega+1}$, itd. (Por. przykłady (v) i (iii) z pierwszej części artykułu).

Do przeliczania zbiorów skończonych służą nam liczby całkowite nieujemne 0, 1, 2, ... Jak widzimy, do przeliczania zbiorów dobrze uporządkowanych służą „liczby" ogólniejsze: widzieliśmy, że prócz liczb całkowitych nieujemnych potrzebne nam były „liczby" ω, $\omega+1$ i dalsze, aby móc ponumerować nimi elementy zbioru dobrze uporządkowanego nieskończonego. Zbiory dobrze uporządkowane prowadzą zatem do uogólnienia pojęcia liczby naturalnej (całkowitej nieujemnej). Nowe „liczby", do których dochodzimy przez rozważanie zbiorów dobrze uporządkowanych, noszą nazwę liczb porządkowych. Są to ciekawe abstrakcyjne twory, badane w teorii mnogości.

2. Indukcja pozaskończona. Czytelnik zna z pewnością z kursu szkolnego twierdzenie o indukcji matematycznej: niech T będzie zbiorem liczb całkowitych nieujemnych, takim, że (I) 0 jest elementem T; i ponadto spełniającym dla dowolnego x warunek (II) jeśli x należy do T, to $x+1$ należy do T. Wówczas T zawiera wszystkie liczby całkowite nieujemne. Twierdzenie to stanowi podstawę do tzw. dowodów indukcyjnych: aby dowieść, że każda liczba całkowita nieujemna ma jakąś własność W, wystarcza pokazać, że (I') 0 ma własność W; (II') dla dowolnego x — jeśli x ma własność W, to również $x+1$ ma własność W. Istotnie, jeśli założenia (I') i (II') są spełnione, to zbiór T tych liczb całkowitych nieujemnych, które mają własność W, spełnia założenie (I) i (II) twierdzenia o indukcji, a więc zawiera wszystkie liczby całkowite nieujemne.

Twierdzenie o indukcji matematycznej daje się uogólnić na dowolne zbiory dobrze uporządkowane. Niech A będzie zbiorem dobrze uporządkowanym przez relację $\leqslant_R$ i niech T będzie podzbiorem A o następującej własności: dla dowolnego x należącego do A, jeśli każdy element y różny od x i poprzedzający x należy do T, to x należy do T; wówczas $T = A$. Dowód jest bardzo prosty: niech X będzie zbiorem tych elementów A, które nie należą do T; ponieważ A jest zbiorem dobrze uporządkowanym, więc X, o ile nie jest puste, ma pierwszy element x. Wówczas żaden element różny od x i poprzedzający x nie należy do X, to znaczy, że każdy taki element należy do T. Z założenia x musi więc być elementem T, a to jest sprzeczne z określeniem x. Zatem X jest puste, tzn. $T = A$.

Udowodnione powyżej twierdzenie nosi nazwę twierdzenia o indukcji pozaskończonej. Stanowi ono podstawę metody nazywanej indukcją pozaskończoną, podobnej do zwykłej zasady indukcji i pozwalającej ustalać własności elementów zbioru dobrze uporządkowanego. Metoda ta jest następująca:

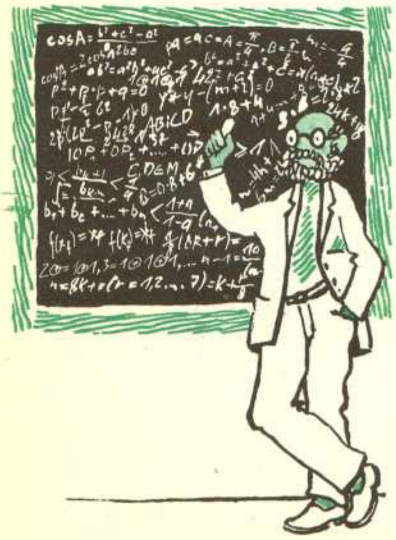
Aby dowieść, że wszystkie elementy zbioru dobrze uporządkowanego A mają jakąś własność W, wystarczy sprawdzić, iż dla każdego elementu x zbioru A —

Rozwiązanie zadania M7

Niech x_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) oznacza liczbę egzaminów, które student miał zdać na j-tym roku studiów. Ma więc być

(1) $0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$,
(2) $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 31$,
(3) $3x_1 = x_5$,
(4) liczby x_j są całkowite.

Najpierw ustalimy, czemu równa się x_1. Jeżeli $x_1 = 1$, to $x_5 = 3$ i nie można znaleźć liczb spełniających warunki (1) i (4). Jeżeli $x_1 = 2$, to $x_5 = 6$; wówczas na mocy warunku (1) znajdujemy $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$ i liczby te nie spełniają warunku (2). Jeżeli $x_1 \geqslant 4$, to $x_5 \geqslant 12$, a ponadto $x_2 \geqslant 5$, $x_3 \geqslant 6$, $x_4 \geqslant 7$. Wówczas $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \geqslant 4+5+6+7+12 = 34$, co przeczy warunkowi (2).
Jeżeli $x_1 = 3$, to $x_5 = 9$. Między 3 a 9 znajduje się pięć liczb całkowitych: 4, 5, 6, 7, 8. Spośród nich trzeba tak wybrać wartości x_2, x_3, x_4, by ich suma była równa $31-3-9 = 19$. Jeżeli $x_4 \leqslant 7$, to $x_3 \leqslant 6$ i $x_2 \leqslant 5$ oraz $x_2+x_3+x_4 \leqslant 18$. Musi więc być $x_4 = 8$ (liczb x_2 i x_3 nie można określić jednoznacznie; są to 4 i 7 lub 5 i 6).



Ten uporządkowany ciąg symboli dowodzi niezbicie naszej hipotezy z założenia, że wszystkie elementy poprzedzające x i różne od x mają własność W — wynika, iż x też ma własność W. Ta metoda dowodu jest często stosowana w teorii mnogości.

...jako aksjomat przyjmiemy, że wszystko da się dobrze uporządkować.

3. Własności mocy zbiorów dobrze uporządkowanych. O zbiorze X mówimy, że jego moc jest nie większa od mocy zbioru Y, jeśli istnieje funkcja wzajemnie jednoznaczna o dziedzinie X i o zbiorze wartości zawartym w Y. Jeśli zbiorem wartości tej funkcji jest cały zbiór Y, to mówimy, że zbiory X i Y mają moce równe.
W teorii mnogości dowodzi się szeregu ciekawych twierdzeń o mocach zbiorów dobrze uporządkowanych. Nie będziemy ich tutaj dowodzili, ale wymienimy kilka najważniejszych. We wszystkich podanych niżej twierdzeniach A i B oznaczają zbiory dobrze uporządkowane, przyczem moc B jest niewiększa niż moc A, a zbiór A jest nieskończony.

Twierdzenie o mocy kwadratu: Zbiór wszystkich par uporządkowanych (a', a''), gdzie a', a'' przebiegają elementy zbioru A, ma moc równą mocy A.

Twierdzenie o mocy sumy: Suma zbiorów A i B ma moc równą mocy A.

Twierdzenie o mocy iloczynu: Jeśli zbiór B jest niepusty, to zbiór wszystkich par uporządkowanych (a, b), gdzie a przebiega zbiór A, zaś b zbiór B, ma moc równą mocy A.

4. Problem dobrego uporządkowania. Uwagi o podstawach teorii mnogości. Podane wyżej twierdzenia pokazują, że o zbiorach dobrze uporządkowanych i zwłaszcza o ich mocach umiemy udowodnić wiele interesujących faktów. Nasuwa się pytanie, czy fakty te pozostają prawdziwe dla dowolnych zbiorów. Odpowiedź twierdząca na to pytanie wynika z następującego zasadniczego wyniku:

Twierdzenie o dobrym uporządkowaniu: dla każdego zbioru X istnieje relacja R dobrze porządkująca zbiór X.

Twierdzenie to wymaga do dowodu tzw. pewnika wyboru, który sformułowany był *explicite* w początku obecnego stulecia właśnie przy okazji dowodu twierdzenia o dobrym uporządkowaniu i który dał okazję do przeprowadzenia dogłębnej dyskusji nad podstawami teorii mnogości. Z dyskusji tej wynikało jasno, że nie wszyscy matematycy są zgodni co do założeń, jakie przyjmuje się dla zbiorów, w szczególności niektórzy uważali, że nie ma żadnych powodów, które skłaniać nas powinny do przyjmowania pewnika wyboru za zdanie prawdziwe. Ponieważ pewnik wyboru łatwo wynika z twierdzenia o dobrym uporządkowaniu, więc matematycy kwestionujący prawdziwość pewnika wyboru kwestionują tym samym prawdziwość twierdzenia o dobrym uporządkowaniu.

Większość matematyków przyjmuje wprawdzie pewnik wyboru i twierdzenie o dobrym uporządkowaniu za prawdziwe, jednak przyjęcie tych założeń nie usuwa wszystkich trudności, jakie wystąpiły w teorii mnogości.

Teoria zbiorów dobrze uporządkowanych pozwoliła więc uzyskać wielkie postępy w teorii mnogości, które uczyniły z niej sprawne narzędzie do badania innych działów matematyki, a także doprowadziła, wespół z innymi działami teorii mnogości, o których tutaj nie mieliśmy okazji wspominać, do powstania nie rozwiązanych jeszcze, a pasjonujących problemów, dotyczących podstaw teorii mnogości i ogólnej filozofii matematyki.

Rozwiązanie zadania M9

Odpowiedź jest twierdząca.
Idea dowodu jest następująca. Wierzchołki A, B, C czworokąta umieszczamy jeden blisko drugiego, zaś czwarty wierzchołek D oraz punkt wewnętrzny P — też blisko jeden drugiego, lecz daleko od A, B, C. Niech l będzie odległością między „miejscem", gdzie znajdują się punkty A, B, C, od „miejsca", gdzie znajdują się D i P. Wówczas $AB \approx 0$, $AC \approx 0$, $CD \approx l$, $DB \approx l$, $PA \approx l$, $PB \approx l$, $PC \approx l$, $PD \approx 0$, $AB+BD+DC+CA \approx 2l$, $PA+PB+PC+PD \approx 3l$.
Oczywiście nie jest to ścisły dowód. Jeżeli redagujemy na przykład rozwiązanie zadania olimpijskiego, to powinno ono wyglądać w następujący sposób:
Na prostej k obieramy punkty A, M, O i D leżące w podanej kolejności i tak, że $AM = OD = 1$, $MO = 10$. Przez punkt M prowadzimy prostą p prostopadłą do k i na p, po różnych stronach prostej k, obieramy takie punkty B i C, że $MB = MC = 1$ (Czytelnik zechce wykonać rysunek). Wówczas $AB = AC = \sqrt{2}$, $BD = CD = \sqrt{1+121} = \sqrt{122}$. $OA = 11$, $OB = OC = \sqrt{101}$, $OD = 1$. Wykażemy, że $OA+OB+OC+OD > AB+BD+DC+CA$, tzn. $12+2\sqrt{101} > 2\sqrt{2}+2\sqrt{122}$, co jest równoważne nierówności $6-\sqrt{2} > \sqrt{122}-\sqrt{101}$. Ponieważ $\sqrt{2} < 2$, więc $6-\sqrt{2} > 4$. Mamy ponadto $\sqrt{122}-\sqrt{101} = \frac{122-101}{\sqrt{122}+\sqrt{101}} = \frac{21}{\sqrt{122}+\sqrt{101}} < \frac{21}{2\sqrt{100}} = \frac{21}{20}$.

Wykazaliśmy więc, że $6-\sqrt{2} > 4 > \frac{21}{20} > \sqrt{122}-\sqrt{101}$