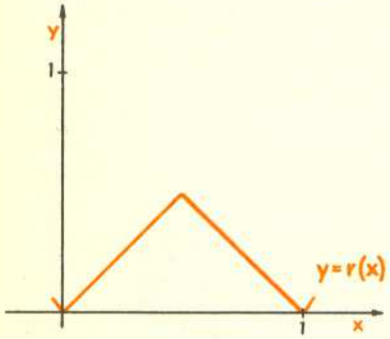
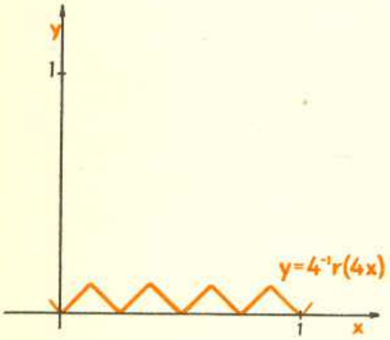
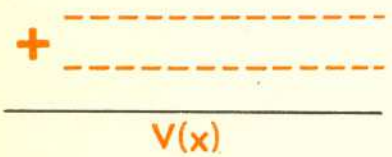
Zjazd *SCFRZR*



Rys. 1



Rys. 2



Rysunek 1 przedstawia wykres funkcji $y = r(x)$, czyli składnik szeregu, definiującego funkcję $V(x)$, odpowiadający $n = 0$. Rysunek 2 przedstawia wykres funkcji $y = 4^{-1}r(4x)$, czyli składnik tego szeregu, odpowiadający $n=1$. Ogólnie, wykres $(n+1)$-ego wyrazu tego szeregu, otrzymuje się z wykresu n-tego wyrazu tego szeregu w taki sam sposób, w jaki wykres na rysunku 2 otrzymano z wykresu na rysunku 1, tzn. przez czterokrotne zmniejszenie w kierunku pionowym i czterokrotne zagęszczenie w kierunku poziomym.

Mówimy, że podzbiór Z zbioru liczb rzeczywistych jest miary zero, jeśli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taki skończony lub nieskończony ciąg przedziałów

$$(a_1 ; b_1), (a_2 ; b_2), (a_3 ; b_3), \ldots ,$$

że spełnione są następujące warunki:
1) Ciąg ten pokrywa zbiór Z, tzn. dla dowolnej liczby x ze zbioru Z istnieje liczba naturalna n taka, że x należy do przedziału $(a_n ; b_n)$.
2) Łączna suma długości tych przedziałów jest mniejsza od ε, czyli

$$(b_1-a_1)+(b_2-a_2)+(b_3-a_3)+ \ldots < \varepsilon.$$

Dnia 1 kwietnia odbył się w Warszawie wszechświatowy zjazd Stowarzyszenia Ciągłych Funkcji Rzeczywistych Zmiennej Rzeczywistej (w skrócie ***SCFRZR***), poświęcony palącym zagadnieniom teorii różniczkowalności. Zjazd obradował w Przestrzeni Funkcji Mierzalnych przy Wydziale Pierwszej Pochodnej Uniwersytetu Matematyki. Przewodniczyła Funkcja Identycznościowa I, zdefiniowana wzorem

$$I(x) = x$$

dla każdej liczby rzeczywistej x.
Sekretarzowały Funkcje Stałe. W zjeździe wzięły udział delegacje bratnich stowarzyszeń Funkcji Mierzalnych oraz Ciągłych Funkcji Rzeczywistych Wielu Zmiennych, a także Organizacji Funkcji Nieciągłych. Koszty Zjazdu zostały pokryte z Funduszu Wyobraźni Matematycznej.
W dyskusji nad aktualnymi zagadnieniami teorii różniczkowalności funkcji ciągłych jako pierwsza zabrała głos Funkcja van der Waerdena V, zdefiniowana wzorem

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n}r(4^n x),$$

gdzie $r(x)$ oznacza odległość liczby rzeczywistej x od najbliższej liczby całkowitej. Funkcja V z ubolewaniem przyznała się, że nie posiada pochodnej w żadnym punkcie. W gorących słowach scharakteryzowała trudną sytuację rachunkową ciągłych funkcji nigdzie nie różniczkowalnych. Zwróciła uwagę na niebezpieczeństwo istnienia takich funkcji w obecnej dobie komputeryzacji. Zlecenie komputerowi obliczenia pochodnej funkcji nigdzie nie różniczkowalnej może doprowadzić do zniszczenia komputera, który jest przecież kosztownym przyrządem.
Następnie zabrała głos Funkcja Weierstrassa W, zdefiniowana wzorem

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos k^n x,$$

gdzie a jest liczbą rzeczywistą, k jest nieparzystą liczbą naturalną oraz

$$0 < a < 1 \quad \text{i} \quad ak \geqslant 6.$$

Oświadczyła ona, że również nie posiada pochodnej w żadnym punkcie, a sytuacja jej jest jeszcze gorsza niż Funkcji van der Waerdena. Poszczególne składniki szeregu definiującego funkcję V mają kształt piły, której zęby maleją i równocześnie zagęszczają się, gdy n dąży do nieskończoności. W punktach kątowych piły pochodna oczywiście nie istnieje. Można jakoś pogodzić się z faktem, że wskutek takiej zębatej konstrukcji w sumie otrzymuje się coś bardzo chropowatego, co — wskutek zagęszczania osobliwości — w każdym punkcie jest pozbawione stycznej. Zupełnie inna jest sytuacja Funkcji Weierstrassa W, jest ona bowiem określona szybko zbieżnym szeregiem, którego wyrazy są pomnożonymi przez stałe funkcjami trygonometrycznymi, a więc funkcjami o wyśmienitych własnościach różniczkowych. Z pozoru wydaje się, że funkcja W musi być nie mniej gładka i pozbawiona chropowatości jak funkcje trygonometryczne. Niestety, rzeczywistość przeczy przypuszczeniom opartym na intuicji. Z zewnątrz funkcja W wydaje się piękna, lecz wewnątrz jest odrażająca, po prostu próchno. Wystarczy spróbować zróżniczkować ją wyraz za wyrazem — od razu rozpada się na poszczególne składniki, tzn. szereg staje się rozbieżny.
Delegatka ze Stowarzyszenia Funkcji Mierzalnych zwróciła uwagę, że sytuacja jest również fatalna, jeśli zawęzić rozważania do funkcji różniczkowalnych prawie wszędzie, to znaczy w każdym punkcie z wyjątkiem bardzo małego zbioru punktów, tzw. zbioru miary zero. Takie funkcje nie są nawet wyznaczone

Ważne w tej definicji jest to, że liczba ε może być dowolnie mała, tzn. dowolnie bliska zeru.
Na przykład każdy zbiór skończony jest miary zero. Ogólniej: każdy zbiór przeliczalny

$$Z = \{x_1, x_2, x_3 \ldots\}$$

(tzn. zbiór, którego wszystkie elementy można ponumerować kolejnymi liczbami naturalnymi) ma miarę zero. Aby się o tym przekonać, należy przyjąć dla danej liczby $\varepsilon > 0$

$$a_n = x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, \qquad b_n = x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}.$$

Istnieją zbiory nieprzeliczalne miary zero.
Żaden przedział nie jest zbiorem miary zero.

Rys. 3

Zbiór Cantora C jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych x postaci

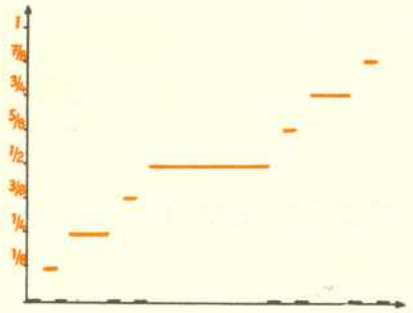
$$(1) \qquad x = \frac{2a_1}{3} + \frac{2a_2}{3^2} + \frac{2a_3}{3^3} + \ldots,$$

gdzie $a_n = 0$ lub 1 dla każdego n. Jeszcze inaczej może być określony jako część wspólna zbiorów $C_0, C_1, C_2, \ldots$, zdefiniowanych indukcyjnie jak następuje: C_0 jest odcinkiem $\langle 0; 1\rangle$. Zbiór C_n jest sumą 2^n rozłącznych przedziałów domkniętych o długości $\frac{1}{3^n}$ każdy. Dzieląc każdy z tych odcinków na trzy części o równej długości i usuwając z każdego z nich środkowy otwarty przedział otrzymujemy 2^{n+1} przedziałów domkniętych, których sumą jest C_{n+1}. Rysunek 3 podaje konstrukcję zbiorów C_0, C_1, C_2, C_3. Usuwane przedziały otwarte noszą nazwę przedziałów przyległych do zbioru Cantora.
Zbiór Cantora jest przykładem nieprzeliczalnego zbioru miary zero.

z dokładnością do stałej przez swoje pochodne. Za przykład może służyć Funkcja C Cantora, tzn. jedyna funkcja ciągła C na odcinku $\langle 0; 1\rangle$, spełniająca następujące tożsamości:

$$C\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}C(x), \qquad C\left(\frac{1}{3}+\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}, \qquad C\left(\frac{2}{3}+\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}C(x)$$

dla każdego x z tego przedziału. Funkcja ta jest ciągła, niemalejąca, różna od stałej, bo $C(0) = 0$ i $C(1) = 1$, a pochodna jej jest prawie wszędzie równa zeru, mianowicie wszędzie, z wyjątkiem punktów zbioru Cantora, który jest zbiorem miary zero. Obecna na sali obrad Funkcja Cantora szczerze przyznała się



Rys. 4

Funkcję Cantora $C(x)$ można inaczej zdefiniować jak następuje. Jeśli x należy do zbioru Cantora C, tzn. jest postaci (1), to

$$(2) \qquad C(x) = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \ldots.$$

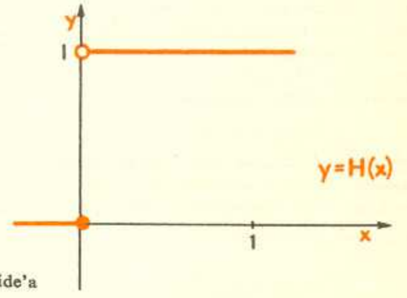
Jeśli $(a; b)$ jest przedziałem przyległym do C, to a i b należą do C, liczby $C(a)$ i $C(b)$ są więc zdefiniowane wzorem (2). Dowodzi się, że $C(a) = C(b)$. Przyjmujemy

$$(3) \quad C(x) = C(a) = C(b) \quad \text{dla każdego}$$

x z przedziału $(a; b)$.
Ponieważ każdy punkt przedziału $\langle 0; 1\rangle$ albo należy do C, albo należy do dokładnie jednego przedziału przyległego do C, wzory (2) i (3) definiują funkcję C na całym przedziale. Z (3) wynika, że funkcja C jest stała na każdym przedziale przyległym do C. Rysunek 4 pokazuje, jak wygląda wykres funkcji C na przedziałach przyległych do C_3

do swych wad, w szczególności do symulowania funkcji stałej przy różniczkowaniu.
Delegatka Organizacji Funkcji Nieciągłych, Funkcja Haeviside'a H, zdefiniowana wzorem

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad x > 0, \\ 0, & \text{gdy} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$



Funkcja Haeviside'a

wyraziła pogląd, że równie katastrofalna jest sytuacja w dziedzinie najprostszych funkcji nieciągłych. Ona sama ma wprawdzie pochodną równą zeru w każdym punkcie $x \neq 0$, ale marzy o tym, by mieć pochodną pierwszego rzędu określoną wszędzie. Niestety przy próbach różniczkowania w punkcie 0 czuje silny ból dążący tak szybko do $+\infty$, że musi je przerwać i pogodzić się z losem.
Delegatka Stowarzyszenia Ciągłych Funkcji Rzeczywistych Wielu Zmiennych poruszyła trudności związane z wielokrotnym różniczkowaniem. Dla funkcji jednej zmiennej jest jeszcze jako tako: jeśli funkcja f ma zdefiniowaną pochodną rzędu m, to ma także dobrze określone i ciągłe wszystkie pochodne mniejszych rzędów. Inaczej jest w dziedzinie funkcji dwu zmiennych. Rozważmy na przykład funkcję

$$U(x, y) = F(x) + F(y),$$

gdzie $F \in$ ***SCFRZR*** jest jakąkolwiek funkcją nie mającą pochodnej w żadnym punkcie. Jeśli różniczkować funkcję U tylko raz, ze względu na jedną ze zmiennych x lub y, różniczkowanie nie jest wykonalne. Natomiast wszystko wskazuje na to, że za wynik różniczkowania dwukrotnego, raz ze względu na jedną zmienną, a potem ze względu na pozostałą zmienną, należy uznać funkcję równą tożsamościowo zeru!

Rozwiązanie zadania M12.
Takimi sześcioma punktami są wierzchołki pięciokąta foremnego i jego środek (to znaczy środek okręgu opisanego na nim). Jeżeli jeden z wierzchołków trójkąta leży w środku pięciokąta, to dwa boki trójkąta są równe promieniowi okręgu opisanego na pięciokącie, jeżeli zaś każdy wierzchołek trójkąta jest wierzchołkiem pięciokąta, to jest oczywiste, że trójkąt jest równoramienny.
Uwaga: Czytelnik zechce się zastanowić, czy istnieje na płaszczyźnie siedem punktów o tej własności.

Inni mówcy wskazali na niebezpieczeństwo istnienia w ***SCFRZR*** tak licznych funkcji bez pochodnej w żadnym punkcie. Zbiór tych złych funkcji jest gęsty w Stowarzyszeniu: dla każdej funkcji $f \in$ ***SCFRZR*** i dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka funkcja $g \in$ ***SCFRZR*** nigdzie nie różniczkowalna, że

$$|f-g| < \varepsilon.$$

$|f-g|$ = kres górny zbioru liczb postaci $|f(x)-g(x)|$, gdzie x należy do dziedziny funkcji f i g.

Funkcje bez pochodnej w żadnym punkcie dosłownie oblepiają wszystkie inne funkcje, nawet te o pięknych tradycjach różniczkowych, jak funkcje różniczkowalne nieskończenie wiele razy i — jeszcze lepsze od nich — funkcje analityczne. Dobre funkcje zarażają się od funkcji nigdzie nie różniczkowalnych ich złymi manierami. Tak wielka liczebność tych funkcji może doprowadzić do inflacji w przestrzeni funkcji ciągłych. W wyniku dyskusji postanowiono rozpisać konkurs na taką reformę teorii różniczkowalności, by każda funkcja $f \in$ ***SCFRZR*** miała pochodne wszystkich rzędów. Koszty reformy pokryje Fundusz Wyobraźni Matematycznej.

R.S.

Aktualności podstaw matematyki

Celem tego artykułu jest przedstawienie głównych kierunków rozwoju podstaw matematyki, głównie teorii mnogości. Obiektami tej teorii w ujęciu von Neumanna są klasy, wśród których wyróżnia się klasy właściwe oraz zbiory. Podejście to, jakkolwiek stanowiące postęp w stosunku do klasycznej teorii Zermelo-Fraenkla, jest obecnie niewystarczające. Współcześnie przyjmuje się istnienie różnego rodzaju przynależności do zbioru. Podstawowym pojęciem jest tu przynależność częściowa, tzw. „słabe bycie elementem" czy też „fragmentaryczne należenie do zbioru". Pojęcie to opiera się, jak łatwo zauważyć, o bardzo naturalne intuicje. Przykładowo: w wielu organizacjach obserwujemy podział członków na aktywnych i ideowych z jednej strony, a biernych i konformistycznych z drugiej. Ci pierwsi reprezentują tradycyjnie rozumiane pojęcie należenia, podczas gdy drudzy — właśnie słabe. Oczywiście intuicje te są odpowiednio uściślone i zaksjomatyzowane. Przytoczmy podstawowy pewnik: Istnieją takie x, A, B, że $x \notin A$ i $x \notin B$ i $x \in A \cup B$, czyli x nie jest elementem ani A, ani B, natomiast jest elementem sumy tych zbiorów. Staje się on bardziej zrozumiały po wprowadzeniu pojęcia zbioru pustawego, mianowicie: A jest pustawy, gdy każdy element należy do niego co najwyżej fragmentarycznie. Przynależność fragmentaryczną zapisuje się symbolicznie: $x \in_f A$ (z angielskiego *feeble* $\in$ — słabo należy). Przytoczony aksjomat mówi zatem, że istnieją zbiory pustawe, których suma nie jest pustawa. Sytuacja taka, intuicyjnie biorąc, zdarza się wtedy, kiedy x nie należy wprawdzie ani do A, ani do B, lecz należy fragmentarycznie do obu tych zbiorów w taki sposób, że jedna jego część leży w zbiorze A, druga w B, a obie razem stanowią już cały element x. Symbolem Op (A) oznaczamy zbiór elementów częściowo należących do A, tzw. zbiór elementów oportunistycznych względem A. Badania wykazały, że elementy zbioru są na ogół oportunistyczne, dokładniejsze jednak zrozumienie tego faktu wymaga znajomości systemów logicznych odmiennych od logiki dwuwartościowej. Systemy te przeżywają obecnie bujny rozkwit. Wspomnieć tu należy przede wszystkim o pracy I. A. Trieszczinina *Some results of zerovalues logics* — podstawowej monografii z dziedziny logiki zerowartościowej (tzw. bezwartościowej). W wielu ośrodkach trwają badania nad ujemnowartościowymi logikami. Zadaniem przyszłości jest stworzenie syntetycznej teorii, sumującej osiągnięcia wymienionych kierunków.

P.T.

Rozwiązanie zadania F4.
Po zamknięciu klucza K będzie płynął w obwodzie prąd do chwili wyrównania się napięć kondensatorów. W tym momencie ładunek znajdujący się początkowo w pierwszym kondensatorze ($q_0 = C_1 \cdot U_0$), rozdzieli się na dwa kondensatory:

$$C_1 U_0 = (C_1 + C_2) U,$$

gdzie U_0 — początkowe napięcie na pierwszym kondensatorze, U — napięcie na kondensatorach po wyrównaniu się potencjałów.

Energia początkowa układu wynosi:

$$E_0 = \frac{C_1 U_0^2}{2},$$

energia końcowa układu wynosi:

$$E = \frac{(C_1 + C_2) U^2}{2} = \frac{C_1^2 U_0^2}{2(C_1 + C_2)}.$$

Zgodnie z zasadą zachowania energii, ilość ciepła, jaka wydzieli się na oporniku podczas całego procesu wyrównywania się napięć, będzie równa:

$$Q = E_0 - E = \frac{1}{2} \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} U_0^2.$$

Zgodnie z warunkami zadania

$$Q = \frac{1}{2} E_0, \quad \text{zatem} \quad C_1 = C_2.$$

Ilość ciepła wydzielona na oporniku R nie zależy od jego oporu. Jeżeli $C_1 = C_2$, warunki zadania są spełnione przy dowolnej wartości R. Kondensatory produkcji przemysłowej oznaczane są symbolami barwnymi, różnymi dla różnych wartości pojemności. Kondensatory o jednakowych pojemnościach będą oznaczone tymi samymi kolorami. Pierwsze pytanie zadania pozostaje więc bez odpowiedzi, na drugie odpowiedź jest jednoznaczna.