O wzorze Eulera

Krzysztof JERZYK

Autor artykułu jest uczniem II klasy Liceum Ogólnokształcącego im. Marszałka S. Małachowskiego w Płocku.

Znamy rozmaite wielościany: foremne, półforemne, gwiaździste, ostrosłupy i inne, o znanych i nie znanych nam nazwach. W kilku wielościanach policzmy wierzchołki W, krawędzie K, ściany S i idąc za szwajcarskim matematykiem Leonardem Eulerem obliczmy wartość wyrażenia

$$W-K+S:$$

Bryła		W	K	S	W−K+S
sześcian		8	12	6	2
ośmiościan		6	12	8	2
ostrosłup n-kątny		$n+1$	$2n$	$n+1$	2
graniastosłup n-kątny		$2n$	$3n$	$n+2$	2

Za każdym razem otrzymaliśmy zależność

(*) $$W-K+S=2.$$

Wielościan jednospójny to, mówiąc opisowo, taki wielościan, który może być uzyskany z kuli przez deformację nie rozrywającą i nie sklejającą.

Związek ten nie jest przypadkowy i, jak wykazał Euler, dotyczy każdego wielościanu *jednospójnego* w szczególności każdego wielościanu wypukłego.

Dowolną trójkę liczb naturalnych (W,K,S) nazywamy *eulerowską* wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia ona warunek (*). W związku z tym pojęciem można postawić następujące pytania:

1. Dla jakich trójek eulerowskich (W,K,S) istnieje wielościan o W wierzchołkach, K krawędziach, S ścianach?
2. Czy są takie trójki eulerowskie (W,K,S), dla których istnieje kilka istotnie różnych wielościanów o odpowiedniej liczbie wierzchołków, krawędzi i ścian?

Odpowiedź na pierwsze pytanie pozostawimy Czytelnikom zauważając, że na pewno (?)

— nie istnieje żądany wielościan, gdy $W<4$,

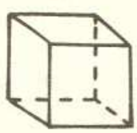
— ani gdy $K<6$,

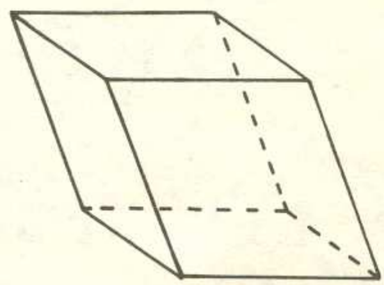
— ani gdy $S<4$,

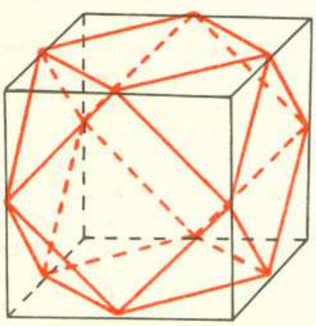
— ani gdy $K=7$;

— istnieje wielościan, w którym $K=6$ lub też K jest dowolną liczbą większą od 7.

Aby odpowiedzieć na drugie pytanie, należałoby ustalić, co będziemy rozumieli przez *istotnie różne* wielościany. Otóż nie będziemy uważali za istotnie różne tylko takie dwa wielościany, z których jeden można uzyskać z drugiego przez deformacje nie zmieniające liczby wierzchołków żadnej ze ścian (np. narysowane niżej).







Odpowiedź na pytanie drugie jest pozytywna. Podam tu sposób uzyskiwania istotnie różnych wielościanów odpowiadających tej samej trójce eulerowskiej.

Zetnijmy wierzchołki wielościanu obcinając krawędzie w połowie jej długości (na rysunku sześcian). Liczby wierzchołków, ścian i krawędzi zmieniają się z (W,K,S) na (W',K',S'). Zmiana ta nie jest chaotyczna: każdy „nowy" wierzchołek odpowiada dawnej krawędzi

$$W'=K,$$

a „nowych" ścian będzie tyle, co „starych" ścian i wierzchołków razem wziętych

$$S'=W+S=K+2$$

i ze wzoru Eulera

$$K'=W'+S'-2=2K.$$

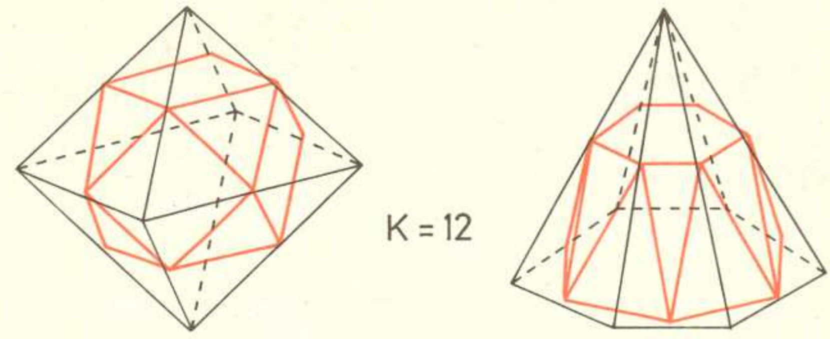
A więc sumarycznie

$$(W',K',S')=(K,2K,K+2).$$

Na podstawie tych zależności można wyciągnąć wnioski:

a) Liczba wierzchołków, ścian i krawędzi bryły powstałej przez ścięcie wierzchołków zależy *jedynie* od liczby krawędzi bryły, której ścinamy wierzchołki.

b) Ścinając tym samym sposobem wierzchołki brył o takiej samej liczbie krawędzi (mimo że mogą one różnić się liczbą wierzchołków i ścian) otrzymamy bryły odpowiadające tej samej trójce eulerowskiej. Tak można właśnie zbudować przykłady odpowiadające na pytanie 2.

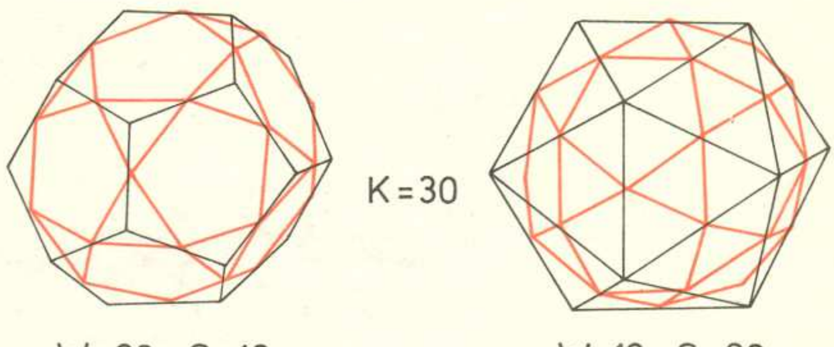


S = 8 W = 6 S = 7 W = 7

$W' = 12$, $K' = 24$, $S' = 14$

8 trójkątów
6 czworokątów

12 trójkątów
2 sześciokąty



W = 20 S = 12 W = 12 S = 20

$W' = 30$, $K' = 60$, $S' = 32$
w obu przypadkach 20 trójkątów, 12 pięciokątów

Warto zauważyć, że nie jest w podanej metodzie rzeczą istotną, iż obcinaliśmy krawędzie akurat w połowie długości. Obcinając np. w $\frac{1}{3}$ długości (z obu stron), otrzymamy z wielościanu odpowiadającego trójce (W,K,S) wielościan odpowiadający trójce $(2K,3K,K+2)$. Proszę sprawdzić!

A można przecież ścinać wielokrotnie. Z drugiej strony nie musimy ścinać wszystkich wierzchołków bryły. Np. po ścięciu w $\frac{1}{2}$ dwóch wierzchołków czworościanu otrzymamy bryłę odpowiadającą tej samej trójce, co sześcian, choć istotnie od sześcianu różną. Ściany jej bowiem będą tworzyły 2 trójkąty, 2 czworokąty i 2 pięciokąty.

Na zakończenie otwarty problem: znaleźć funkcję (trójargumentową) wyznaczającą liczbę istotnie różnych wielościanów odpowiadających danej trójce eulerowskiej.

„Sztuka wygrywania" — rozwiązanie. Łatwo zauważyć, że częstość optymalna istnieje, przy każdej bowiem częstości oczekiwane wypłaty graczy są równe. Jeśli więc jakaś częstość daje maksymalną wypłatę jednemu, to daje taką samą (a więc też maksymalną) drugiemu.

Znalezienie częstości optymalnej jest proste. Jeśli obaj stosują W z częstością p (ale niezależnie!), to każdy gracz może oczekiwać wypłaty $u(p)$:

$$u(p) = p^2+2(1-p)^2+5p(1-p) = -6p^2+p+2,$$

która osiąga maksimum dla $p = \frac{1}{12}$. Maksymalna oczekiwana wypłata wynosi $2\frac{1}{24}$ gr na jedną grę, a więc każdy z graczy może oczekiwać zysku około 20,5 zł w tysiącu gier.