MONIKA MARKIEWICZ Z WARSZAWY: *Uprzejmie proszę o wyjaśnienie mi na łamach* »Delty« (1) *kiedy w definicji nowego pojęcia używamy równoważności, a kiedy słownego sformułowania „jeżeli..."*;(2) *czy zapis „≡" oznacza to samo, co „⇔"?*

(1) Nie ma tu żadnej reguły, można i tak, i tak. Jest jednak pewna subtelna różnica w sposobie używania tych sformułowań. Porównaj zdania

I. „Df. f jest funkcją ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek:..."

II. „Df. Jeżeli f spełnia warunek ..., to *mówimy*, że jest funkcją ciągłą."

Pierwsze zdanie jest zdaniem należącym do matematyki, prawdziwym z założenia. Drugie zdanie jest zdaniem o matematyce, ale do matematyki nie należy. Występuje w nim bowiem czasownik „mówić", odnoszący się do czynności człowieka. Sugeruje ono, że jeśli się chce dobrze rozumieć to, co nastąpi po tym zdaniu, to należy termin „funkcja ciągła" rozumieć w taki sposób, by zdanie I było prawdziwe.

(2) To zależy od używającego te symbole. Bywa tak, że z dwu ludzi jeden używa „≡", drugi „⇔" w tym samym sensie. Jednakże często ⇔ jest symbolem operacji logicznej, która każdej parze dowolnych zdań przyporządkowuje ich równoważność $p \Leftrightarrow q$. Ta równoważność może być — w zależności od wartości logicznych zdań p i q — prawdziwa lub fałszywa. Natomiast symbol ≡ rezerwuje się dla takich sytuacji, w których wiadomo, że dwa konkretne zdania p i q mają tą samą wartość logiczną, a więc że równoważność $p \Leftrightarrow q$ jest zdaniem prawdziwym. Napis $p \equiv q$ oznacza to właśnie (TBI).

XVII MIĘDZYNARODOWA OLIMPIADA MATEMATYCZNA

W dniach 7–8 lipca 1975 r. odbyła się kolejna Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna. Ekipa polska większych sukcesów nie zanotowała. Oto zadania:

Dzień pierwszy.

1. Niech x_i, y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) będą takimi liczbami rzeczywistymi, że
$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \ldots \geqslant x_n,$$
$$y_1 \geqslant y_2 \geqslant y_3 \geqslant \ldots \geqslant y_n.$$
Dowieść, że jeżeli ciąg $z_1, z_2, \ldots z_n$ jest dowolną permutacją liczb $y_1, y_2, \ldots y_n$, to
$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2.$$

2. Niech $a_1, a_2, a_3 \ldots$ będzie takim ciągiem nieskończonym liczb całkowitych dodatnich, że $a_k < a_{k+1}$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots$.
Dowieść, że nieskończenie wiele wyrazów a_m można przedstawić w postaci
$$a_m = x \cdot a_p + y \cdot a_q,$$
gdzie x i y są liczbami całkowitymi dodatnimi i $p \neq q$.

3. Na bokach dowolnego trójkąta ABC zbudowano trójkąty ABR, BCP, CAQ leżące w jego płaszczyźnie, z których żaden nie ma wspólnych punktów wewnętrznych z trójkątem ABC, przy czym
$\sphericalangle PBC = \sphericalangle CAQ = 45°$,
$\sphericalangle BCP = \sphericalangle QCA = 30°$,
$\sphericalangle ABR = \sphericalangle BAR = 15°$,
Dowieść, że $\sphericalangle QRP = 90°$ i $QR = RP$.

Dzień drugi.

4. Suma cyfr liczby 4444^{4444} zapisanej w dziesiętnym systemie pozycyjnym jest równa A. Niech B będzie sumą cyfr liczby A. Znaleźć sumę cyfr liczby B. (Liczby A i B zostały zapisane również w dziesiętnym systemie pozycyjnym.)
5. Czy na okręgu o promieniu 1 można znaleźć 1975 takich punktów, że długość każdej cięciwy, której końcami są dwa spośród nich, jest liczbą wymierną? Odpowiedź należy uzasadnić.
6. Znaleźć wszystkie wielomiany P dwóch zmiennych spełniające następujące warunki:
(1) P jest wielomianem jednorodnym stopnia n, to znaczy dla dowolnych liczb rzeczywistych t, x, y jest
$$P(tx, ty) = t^n P(x, y),$$
gdzie n jest liczbą naturalną.
(2) Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c jest
$$P(a+b, c) + P(b+c, a) + P(c+a, b) = 0.$$
(3) $$P(1,0) = 1.$$