

Szeregi Fouriera

Już w szkole podstawowej spotykamy się z funkcjami $\sin x$ i $\cos x$. Pojawiają się one jako narzędzie do obliczania wartości różnych elementów trójkąta, jak np. długości boków, kątów itp. Zastosowanie tych funkcji w matematyce jest nieporównanie szersze. Celem niniejszego artykułu jest naszkicowanie podstaw pewnej teorii, będącej zastosowaniem funkcji sinus i cosinus do analizy matematycznej. Teoria ta nosi nazwę teorii szeregów Fouriera (od nazwiska jej twórcy — francuskiego matematyka i fizyka J. Fouriera, 1768–1830). Stała się ona świetnym narzędziem do rozwiązywania równań opisujących rozchodzenie się ciepła, oraz analizy drgań sprężystych, ale to już całkiem inna historia, warta przedstawienia w odrębnym artykule.

Będziemy rozważać funkcje $\cos nx$ i $\sin nx$ na odcinku $(-\pi, \pi)$; argument x jest tutaj liczbą rzeczywistą niemianowaną (kąty mierzymy w mierze łukowej). Niech m i n będą dwiema dowolnymi różnymi liczbami naturalnymi. Korzystając z tożsamości trygonometrycznych

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m-n)x + \sin(m+n)x]$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

łatwo sprawdzić, że zachodzą następujące równości:

$$(1a) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$(1b) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \sin(m+n)x] dx = 0,$$

$$(1c) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x] dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x - \cos(m-n)x] dx = 0,$$

$$(1d) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} \, dx = \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2nx \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2 nx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = 2\pi - \pi = \pi.$$

W analizie matematycznej układy funkcji $f_n(x)$, $x \in (a, b)$, $n = 1, 2, \dots$ o następującej własności:

$$\int_a^b f_m(x) f_n(x) \, dx = 0 \quad \text{dla } n \neq m,$$

nazywamy *układami ortogonalnymi* na odcinku (a, b) . Tak więc sprawdziliśmy, że układ funkcji: $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ jest układem ortogonalnym na odcinku $(-\pi, \pi)$. Przez analogię do wielomianów zmiennej rzeczywistej, funkcje postaci

$$T_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

nazywamy wielomianami trygonometrycznymi n -tego stopnia. W niniejszym artykule zajmiemy się funkcjami nieco ogólniejszej postaci, a mianowicie takimi funkcjami $f(x)$, które dają się przedstawić jako suma szeregu:

$$(2) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

i dla których szereg ten jest zbieżny w każdym punkcie $x \in (-\pi, \pi)$. Szereg stojący po prawej stronie równości (2) nosi nazwę szeregu Fouriera funkcji $f(x)$.

Twierdzenie to formułuje się dla funkcji $f(x)$ całkowalnych w sensie Lebesgue'a. Jeżeli Czytelnik nigdy nie spotkał się z tym pojęciem, niech traktuje całkę $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$ w takim sensie, jaki zna.

Dowodzi się, że jeżeli $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < +\infty$, to dla każdej funkcji $g(x)$ takiej, że $\int_{-\pi}^{\pi} g^2(x) dx < +\infty$,

bez względu na zbieżność szeregu (2) zachodzi równość:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) g(x) dx$$

i szereg po prawej stronie jest zbieżny.

Korzystając z powyższego sformułowanego twierdzenia łatwo znaleźć współczynniki a_n i b_n danej funkcji $f(x)$. Przypuśćmy, że funkcja $f(x)$ daje się przedstawić w postaci (2). Mnożymy obie strony równości przez $\cos mx$, gdzie m jest dowolną liczbą naturalną. Następnie całkujemy obie strony otrzymanej równości w przedziale $(-\pi, \pi)$. W rezultacie, po skorzystaniu z przytoczonego wyżej twierdzenia, dostajemy:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \right].$$

Na mocy równości (1a)–(1c) tylko całka $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos mx dx$ jest różna od 0, zatem, korzystając

$$\text{z (1d) mamy: } \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \pi a_m.$$

Analogicznie, mnożąc (2) przez $\sin mx$ i całkując w przedziale $(-\pi, \pi)$ dostaniemy:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \pi b_m.$$

Aby znaleźć jeszcze a_0 wystarczy scałkować obie strony równości (2); korzystając z (1a)

$$\text{dostajemy: } \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi a_0.$$

A zatem znaleźliśmy następujące wzory na a_n i b_n :

$$(3) \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Współczynniki a_n i b_n są więc jednoznacznie wyznaczone przez funkcję $f(x)$. Stąd przedstawienie (2) funkcji $f(x)$ jest jedyne w tym sensie, że nie można funkcji $f(x)$ przedstawić na dwa różne sposoby jako sumy szeregu funkcji $\cos nx$ i $\sin nx$. Ogólnie, dla dowolnej funkcji $f(x)$, dla której współczynniki a_n i b_n dane wzorami (3) mają sens,

$$\text{szereg } a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

nazwiemy szeregiem Fouriera funkcji $f(x)$. Inna sprawa, że szereg ten może nie być zbieżny do funkcji $f(x)$ (może być w ogóle rozbieżny w niemal każdym punkcie x). Przypadek takich funkcji jest mało interesujący, ich szereg Fouriera jest praktycznie rzecz biorąc bez jakiegokolwiek związku z wartościami funkcji $f(x)$. Interesują nas te funkcje, dla których ich szereg Fouriera jest do nich zbieżny w każdym punkcie x , lub niemal w każdym punkcie (słowo „niemal” nadamy za chwilę ścisły sens). Następujące twierdzenie stanowi pewien warunek dostateczny na to, aby funkcja była sumą swojego szeregu Fouriera.

Twierdzenie 1. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w przedziale $(-\pi, \pi)$ i jej pochodna $f'(x)$ jest funkcją ciągłą w tym przedziale, to równość (2) zachodzi w każdym punkcie $x \in (-\pi, \pi)$. Współczynniki a_n i b_n są dane wzorami (3).

Przyjrzyjmy się jak wyglądają rozwinięcia Fouriera pewnych konkretnych funkcji.

Przykład 1. Niech $f(x) = \frac{1}{2}x$; obliczmy współczynniki a_n i b_n tej funkcji. W tym celu zauważmy, że całka funkcji nieparzystej w przedziale $(-\pi, \pi)$ wynosi 0:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} x dx = 0, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} x \cos nx dx = 0.$$

Współczynniki b_n obliczymy korzystając ze wzoru na całkowanie przez części:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} x \sin nx dx = -\frac{1}{2\pi} x \frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n} \cos n\pi.$$

Ponieważ funkcja $\frac{1}{2}x$ ma ciągłą pochodną, więc na mocy twierdzenia 1 zachodzi równość:

$$\frac{1}{2}x = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots, \quad -\pi < x < \pi.$$

$$\text{Podstawiając } x = \frac{\pi}{2} \text{ dostajemy: } \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$



Przykład 2. Niech $f(x) = |x|$. Wówczas funkcje $|x| \cos nx$ są parzyste, zatem współczynniki a_n dla $n \geq 1$ są równe 0. Natomiast

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi n} x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nx dx =$$

$$= \frac{-2}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$

Funkcja $|x|$ nie jest różniczkowalna w 0, mimo to jej szereg Fouriera jest do niej zbieżny w każdym punkcie $(-\pi, \pi)$.

Stąd:
$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right).$$

Podstawiając $x = 0$ dostajemy:
$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right).$$

Przekształcając otrzymany wzór otrzymujemy:
$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

Korzystając z ostatniej równości obliczymy sumę s szeregu

$$s = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Ponieważ

$$\frac{s}{4} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots,$$

więc

$$s - \frac{s}{4} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Stąd $s = \frac{1}{6} \pi^2$.

Od czasów Fouriera przez kilkadziesiąt lat podejrzewano, że szereg Fouriera każdej funkcji ciągłej jest do niej zbieżny w każdym punkcie. Ale w osiemdziesiątych latach ubiegłego stulecia francuski matematyk du Bois-Reymond znalazł przykład funkcji ciągłej, której szereg Fouriera nie był zbieżny do niej w jednym punkcie. Następnie pospyły się już przykłady funkcji ciągłych, których szereg Fouriera nie był zbieżny do wartości funkcji w pewnych danych punktach. Między innymi S. Banach podał pewien bardzo ogólny sposób konstrukcji takich funkcji (jego konstrukcja obejmuje przykład funkcji ciągłej, której szereg Fouriera jest rozbieżny w każdym punkcie wymiernym z przedziału $(-\pi, \pi)$). Na przełomie osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych lat ubiegłego stulecia rosyjski matematyk N. Łuzin (1883—1950) sformułował pewną hipotezę na ten temat. Do sformułowania jej będziemy potrzebować pojęcia zbioru miary Lebesgue'a równej zeru.

Definicja. Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma miarę Lebesgue'a równą zeru jeśli dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka nieskończona rodzina przedziałów $P_n = (\alpha_n, \beta_n)$, że A jest zawarty w sumie

wszystkich przedziałów P_n oraz
$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \beta_n| < \varepsilon.$$

Na przykład zbiór W wszystkich liczb wymiernych na prostej jest miary zero. Rzeczywiście, wszystkie liczby wymierne możemy ustawić w ciąg (w_n) . Dla danej liczby $\varepsilon > 0$ oberzemy jako

P_n przedział o środku w_n i o długości $\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Oczywiście suma wszystkich przedziałów P_n

pokrywa cały zbiór W , a suma długości P_n wynosi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Hipoteza Łuzina brzmiąca następująco: dla każdej funkcji $f(x)$ takiej, że $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < +\infty$,

szereg Fouriera funkcji $f(x)$ jest zbieżny do $f(x)$ w każdym punkcie $x \in (-\pi, \pi) - A$, gdzie A jest pewnym zbiorem o mierze Lebesgue'a równej 0. Innymi słowy: szereg Fouriera jest zbieżny poza pewnym zbiorem miary 0. Można by więc powiedzieć, że szereg jest zbieżny niemal wszędzie, gdyż miara zbioru punktów zbieżności jest nieporównywalnie większa od miary zbioru punktów rozbieżności. Hipoteza Łuzina była uważana za najtrudniejszy problem analizy matematycznej przez przeszło 80 lat. Dopiero w roku 1966 szwedzki matematyk Carleson udowodnił jej słuszność.

Możliwość przedstawienia funkcji za pomocą jej szeregu Fouriera jest niesłychanie wygodna w wielu zadaniach analizy matematycznej i fizyki teoretycznej. Warto wspomnieć jeszcze o jednym twierdzeniu z teorii szeregów Fouriera. Jest to tzw. tw. Fejéra (L. Fejér — węgierski matematyk 1880—1957). Oznaczmy przez $s_n(x)$ ciąg sum cząstkowych szeregu Fouriera funkcji f :

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Rozwiązanie zadania M 83.

Gdyby funkcja f była okresowa, o okresie m to, ponieważ $f(0) = 2$, byłoby też $f(m) = \cos m + \cos m = 2$. Ale $\cos x \leq 1$, ostatnia równość może więc zachodzić tylko wtedy, gdy $\cos m = 1$ i $\cos m = 1$, a więc gdy $m = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$ i $am = \left(2l + \frac{1}{2}\right)\pi$, gdzie k i l

są pewnymi liczbami całkowitymi. Dzieliąc ostatnie dwie równości stronami otrzymujemy

$$a = \frac{2k + \frac{1}{2}}{2l + \frac{1}{2}} = \frac{4k + 1}{4l + 1}, \text{ co oznacza,}$$

że a byłoby liczbą wymierną wbrew założeniu.



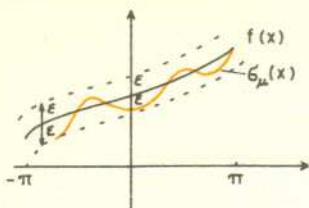
Rozwiązanie zadania M 84.

Wobec równości: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$,
 $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha =$
 $= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha =$
 $= \sin\alpha(2\cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$
 $= \sin\alpha(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$ otrzymujemy:

$$f(\alpha) = \frac{1}{3} \sin\alpha(3 + 3\cos\alpha + 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$$

$$= \frac{1}{3} \sin\alpha(2 + 3\cos\alpha + 4\cos^2\alpha) =$$

$$= \frac{1}{3} \sin\alpha \left[\left(2\cos\alpha + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{16} \right] > 0,$$



Twierdzenie 2. Jeżeli $f(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale $(-\pi, \pi)$, to dla każdego $x \in (-\pi, \pi)$ ciąg

$$\sigma_n(x) = \frac{s_1(x) + s_2(x) + \dots + s_n(x)}{n}$$

jest zbieżny do $f(x)$. Co więcej, jest to tzw. zbieżność jednostajna, tzn. dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba N , że dla każdego $n > N$ i każdego $x \in (-\pi, \pi)$ zachodzi nierówność:

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Funkcje $\sigma_n(x)$ są oczywiście wielomianami trygonometrycznymi. Z twierdzenia Fejéra wynika, że każdą funkcję ciągłą można przybliżyć wielomianami trygonometrycznymi, przy czym przybliżenie to jest dobrym przybliżeniem dla każdego x (zob. rysunek). Jeżeli funkcja $f(x)$ jest określona na całej prostej i ponadto jest okresowa z okresem 2π , to wszystkie przytoczone tu rozważania można odnieść do takiej funkcji i na całej prostej. Tak samo można przenieść otrzymane wyniki na dowolny przedział (a, b) , należy tylko rozpatrywać wówczas funkcje

$$\cos n \left(\frac{\pi}{b-a} x - \frac{a\pi}{b-a} \right), \quad \sin n \left(\frac{\pi}{b-a} x - \frac{a\pi}{b-a} \right).$$

W obecnej chwili teoria szeregów Fouriera jest już mocno rozwiniętą teorią, chociaż ciągle pojawiają się nowe prace na ten temat (i to coraz trudniejsze). Teoria szeregów Fouriera do dziś dnia stanowi jeszcze potężne narzędzie badań w analizie matematycznej i ciągle jest jeszcze źródłem inspiracji twórczej dla wielu matematyków.

Rozwiązanie zadania F 28



a. Szczeliny s_1 i s_2 stanowią wtórne źródła światła i wiązki świetlne z nich wychodzące interferują ze sobą. Jak wiadomo, dla światła monochromatycznego kąty, pod którymi obserwujemy maksima interferencji (jasne prążki) są dane wzorem:

$$\sin \alpha_k = \pm k \frac{\lambda}{a}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Należy podkreślić, że w doświadczeniu Younga prążki występują zawsze, niezależnie od odległości ekranu i szczelin. Pomijając maksimum do przodu ($k = 0$) możemy ocenić szerokość kolejnych prążków oraz ich rozseparowanie na ekranie:

Szerokość k -tego prążka wynosi $\Delta_k = D \cdot \operatorname{tg} \alpha_k(\lambda_2) - D \cdot \operatorname{tg} \alpha_k(\lambda_1) \approx \frac{Dk}{a} (\lambda_2 - \lambda_1) = 4 \cdot k \cdot 10^{-3} \text{ cm}$.

Natomiast odległość między końcem k -tego prążka i początkiem $(k+1)$ -ego wynosi

$$x_k \approx D \frac{(k+1)\lambda_1}{a} - D \frac{k\lambda_2}{a} = \frac{D}{a} k \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{k} - \lambda_2 \right),$$

czyli: $x_1 = 4,4 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$, $x_2 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$, $x_3 = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$,...

Odległość między kolejnymi prążkami będzie równa zero dla $k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = 12$. Natomiast dla $k = \frac{2\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = 24$ cały $(k+1)$ prążek będzie zawarty w k -tym i $(k+2)$ prążku.

Czyli orientacyjna liczba rozróżnialnych prążków wyniesie około 15–20. Liczba ta nie zależy od odległości ekranu od szczelin.

b. Oznaczmy szerokość pierwszej szczeliny przez z .

Pomiędzy falami wychodzącymi pod kątem α z dwóch krańców źródła rozciągniętego wytwarza się różnica faz równa:

$$\delta = 2\pi \frac{z \sin \alpha}{\lambda} \approx 2\pi \frac{z \cdot a}{2d\lambda}$$

gdzie $\sin \alpha$ dla naszego eksperymentu przybliżyliśmy przez $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2d}$.

Wpływ rozmiarów źródła na interferencję można zaniedbać jeśli δ jest mniejsze od $\frac{\pi}{2}$. Stąd

$$z < \frac{d \cdot \lambda}{2a} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}.$$

c. Szkic nowego ustawienia eksperymentu jest pokazany na rysunku obok. Promień docierający do szczeliny s_1 przebiega inną drogą niż jego partner dążący do s_2 .

Zachodzą następujące oczywiste związki:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2d} = 5 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} = n(\lambda), \quad \sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha, \quad \sin \alpha' \approx \operatorname{tg} \alpha'.$$

$$\frac{a}{2} = (d-h)\operatorname{tg} \alpha' + h \operatorname{tg} \beta'.$$

$$\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha \approx \frac{ah}{2d^2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 4 \cdot 10^{-6}.$$

Liczmy różnicę dróg optycznych między dwoma promieniami. Teoretycznie należy uwzględnić różnicę dróg przebytych przez promienie w powietrzu oraz fakt, że promień dążący do s_1 przechodził przez ośrodek o współczynniku załamania większym od jednego. Różnica dróg optycznych dla danej λ wynosi:

$$\Delta = (d-h)(\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha) \sin \alpha + \frac{n \cdot h}{\cos \beta'} - \frac{h}{\cos \alpha} \approx \frac{a \cdot h}{2d} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + h(n-1),$$

gdyż z dobrym przybliżeniem można przyjąć $\cos \beta' \approx \cos \alpha \approx 1$. Szczeliny s_1 i s_2 stanowią i w tym wypadku źródła światła, tylko emitują fale przesunięte w fazie o $\frac{2\pi \Delta}{\lambda}$ (przesunięcie zależy od λ). Fale z dwóch szczelin wzmacniają się, jeżeli różnica faz wynosi $2\pi k$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Pełna różnica faz składa się z różnicy faz źródeł oraz różnicy dróg optycznych interferujących fal (jak w typowym doświadczeniu Younga). Stąd:

$$2\pi k = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} + \frac{2\pi a n \sin \alpha_k}{\lambda}, \quad \text{czyli} \quad \sin \alpha_k = \frac{k\lambda}{a} - \frac{\Delta}{a}.$$

Widać, że obraz interferencyjny przesunie się na ekranie o odcinek $D \operatorname{tg} \alpha_0 \approx 13,2 \text{ cm}$.

Natomiast prążki będą zamazane, ponieważ ich szerokość wynikająca z różnych wartości współczynnika n dla różnych λ wyniesie $\frac{D \cdot h}{a} (n_1 - n_2) = 8 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$, czyli więcej niż odległość między kolejnymi maksimumi dla danej długości fali.

