Między gradientem, rotacją i dywergencją zachodzi szereg związków. Wymienię tylko te dwa spośród nich, które wydają mi się najważniejsze:

a) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} A) = 0$.

b) Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, żeby pole wektorowe A było potencjalne, jest warunek $\operatorname{rot} A = 0$

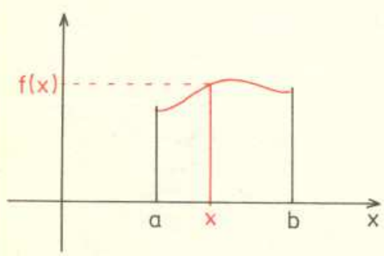
Z każdego z nich wynika natychmiast równość, którą umieściłem w tytule

$$\operatorname{div}[\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)] \equiv 0.$$

Różne całki — podobne własności

Rozważmy zadanie:

Dany jest odcinek $\langle a, b\rangle$ na osi X. Z każdego punktu x tego odcinka wystawiamy prostopadle w górę odcinek o długości $f(x) \geqslant 0$. Obliczyć pole S powstającej w ten sposób figury płaskiej (o funkcji $f(x)$ zakładamy, że jest „porządna", np. ciągła).

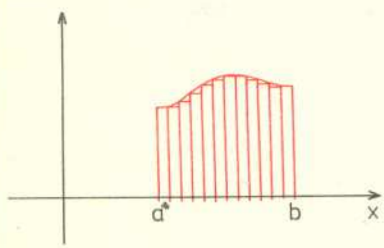


Rys. 1

Jak wiemy, rozwiązaniem tego zadania jest *całka (pojedyncza)* funkcji f po odcinku $\langle a, b\rangle$ (zob. rys. 1):

$$S = \int_{\langle a,b\rangle} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Co więcej, historycznie rzecz biorąc, całka oznaczona została wprowadzona właśnie po to, by była ona rozwiązaniem naszego zadania. Przybliżony sposób obliczania tej całki (o ile ona istnieje) podany jest na rys. 2 (dodajemy pola małych prostokątów). Jak wiemy, można również obliczać całki z funkcji nie tylko dodatnich.



Rys. 2

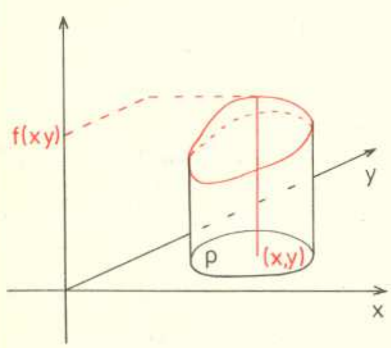
Rozważmy teraz zadanie analogiczne (rys. 3):

Dany jest obszar płaski $\mathscr{P}$ w płaszczyźnie XY. Z każdego punktu (x, y) tego obszaru wystawiamy prostopadle „w górę" odcinek o długości $f(x, y) \geqslant 0$. Obliczyć objętość B powstającej w ten sposób bryły (o funkcji $f(x, y)$ i tu zakładamy, że jest „porządna", np. ciągła).

Rozwiązanie tego zadania nazywa się *całką podwójną* funkcji $f(x, y)$ po obszarze $\mathscr{P}$:

$$B \stackrel{\text{df}}{=} \iint_{\mathscr{P}} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\mathscr{P}} f(x, y)\,d\mathscr{P}.$$

Przybliżony sposób obliczania tej całki (o ile ona istnieje) podany jest na rys. 4 (dodajemy objętości małych prostopadłościanów). Okazuje się, że można zdefiniować nieco ogólniej całkę podwójną, tak aby miała ona sens dla funkcji nie tylko dodatnich.



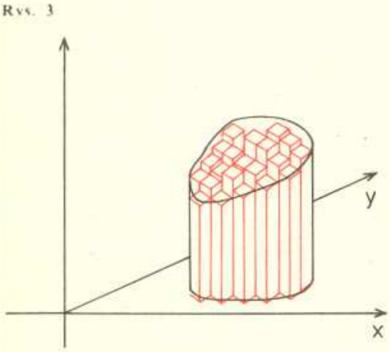
Rys. 3

W podobny sposób można wprowadzić całkę potrójną. Formułujemy mianowicie zadanie:

Dany jest w przestrzeni XYZ obszar trójwymiarowy (bryła) $\mathscr{V}$. Z każdego punktu (x, y, z) wystawiamy „w czwarty wymiar" prostopadle w kierunku dodatniego zwrotu czwartej osi odcinek o długości $f(x, y, z) \geqslant 0$ (o funkcji $f(x, y, z)$ zakładamy, że jest np. ciągła). Obliczyć „objętość czterowymiarową" U powstającej w ten sposób bryły czterowymiarowej.

Rozwiązaniem tego zadania jest *całka potrójna* z funkcji $f(x, y, z)$ po bryle $\mathscr{V}$:

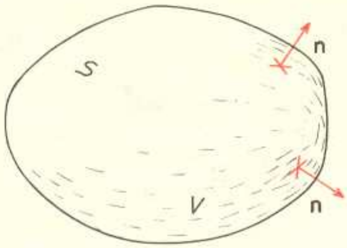
$$U = \iiint_{\mathscr{V}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\mathscr{V}} f(x, y, z)\,d\mathscr{V}.$$



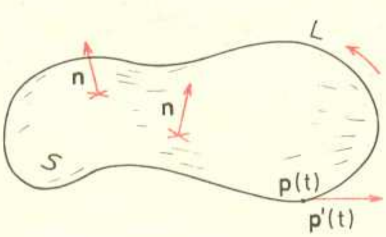
Rys. 4

Przybliżony sposób obliczania tej całki (o ile ona istnieje) jest analogiczny do poprzednich: dzielimy $\mathscr{V}$ na małe kostki, objętość kostki mnożymy przez wartość funkcji f w lewym-dolnym-przednim rogu kostki (będzie to objętość „prostopadłościanu czterowymiarowego") i wszystkie te iloczyny dodajemy. Trudno sobie wyobrazić sens geometryczny tej całki, ma ona jednak proste ilustracje fizyczne. Np. jeśli $\mathscr{V}$ jest geometrycznie ciałem o niejednorodnej gęstości $f(x, y, z)$, to dla obliczenia masy tego ciała należy obliczyć całkę z gęstości po bryle $\mathscr{V}$. (Innymi słowy — gęstość „odkładamy" w czwartym wymiarze, nadając obliczaniu masy interpretację geometryczną). Przybliżony sposób obliczania całki odpowiada tu skorzystaniu z faktu, że w bardzo małych obszarach gęstość można uznać za praktycznie stałą.

Uznajmy więc, że wiemy już, co to są całki: podwójna i potrójna. Przyjmijmy też, że „definicje" całek: *krzywoliniowej* i *powierzchniowej* podane na marginesie artykułu $\operatorname{div}[\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)] \equiv 0$ też w wystarczającym stopniu uruchomiły naszą intuicję. Możemy teraz sformułować trzy interesujące twierdzenia.



Rys. 5



Rys. 6

Twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego. Jeśli $\mathscr{S}$ jest gładką powierzchnią zamkniętą, $\boldsymbol{n}(x, y, z)$ wektorem jednostkowym zewnętrznie prostopadłym do tej powierzchni w punkcie (x, y, z), $\mathscr{V}$ — bryłą, której brzegiem jest $\mathscr{S}$ (rys. 5) i wreszcie $W = (P, Q, R)$ polem wektorowym na $\mathscr{V}$ takim, że funkcje P, Q, R są różniczkowalne, to

$$\iint_{\mathscr{S}} W \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\mathscr{S} = \iiint_{\mathscr{V}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}\mathscr{V} = \iiint_{\mathscr{V}} \operatorname{div} W \mathrm{d}\mathscr{V}.$$

Innymi słowy, wartość całki po $\mathscr{V}$ pewnej funkcji zależnej od pochodnych W (dywergencji tego pola) wyznaczona jest jednoznacznie przez wartości pola W na brzegu $\mathscr{S}$ bryły $\mathscr{V}$. Zaskakujące?

Twierdzenie Stokesa. Niech $\mathscr{L}$ będzie gładką krzywą zamkniętą o ustalonej orientacji (kierunku obiegu) ograniczającą powierzchnię $\mathscr{S}$ w przestrzeni trójwymiarowej (rys. 6), a $W = (P, Q, R)$ polem wektorowym określonym na $\mathscr{S}$ takim, że funkcje P, Q, R są różniczkowalne. Niech $\boldsymbol{n}(x, y, z)$ będzie wektorem jednostkowym prostopadłym do $\mathscr{S}$ w punkcie (x, y, z) o zwrocie wybranym tak, że dla obserwatora siedzącego na jego końcu krzywa $\mathscr{L}$ obiegana jest w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Niech wreszcie $\boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \langle a, b \rangle$, będzie równaniem parametrycznym krzywej $\mathscr{L}$ (wtedy wektor $\boldsymbol{p}'(t) = [x'(t), y'(t), z'(t)]$ jest styczny do krzywej $\mathscr{L}$ w punkcie $(x, y, z) = \boldsymbol{p}(t)$). Przy tych założeniach

$$\int_{\langle a,b \rangle} W \cdot \boldsymbol{p}' \mathrm{d}t = \iint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{n} \cdot \left[\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] \mathrm{d}\mathscr{S} = \iint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{n} \cdot \operatorname{rot} W \mathrm{d}\mathscr{S}.$$

A więc — wartość całki po powierzchni $\mathscr{S}$ z pewnej funkcji zależnej od pochodnych W (tzn. z iloczynu skalarnego rotacji W i wektora $\boldsymbol{n}$) wyznaczona jest jednoznacznie przez wartości pola W na brzegu powierzchni $\mathscr{S}$ (tj. na krzywej $\mathscr{L}$). Dziwne?

I trzecie twierdzenie. Jeśli punkty a, b są końcami odcinka $\mathscr{I}$, na którym określona jest różniczkowalna funkcja F, to

$$F(b) - F(a) = \int_{\mathscr{I}} F'(t) \mathrm{d}t.$$

A więc wartość całki po krzywej $\mathscr{I}$ z pewnej funkcji zależnej od F (to jest z jej pochodnej) wyznaczona jest jednoznacznie przez wartości funkcji F na brzegu (to jest na końcach) tej krzywej. Dziwne? Nie bardzo. Jest to dobrze znany wzór na obliczanie całki oznaczonej.

Dwa poprzednie wzory nie są dziwniejsze od tego. Jedynie — znacznie bardziej skomplikowane.

Zadania

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F 35. Przypuśćmy, że mamy dwie takie same rolki obracające się w przeciwnych kierunkach (ku sobie) ze stałą prędkością kątową Ω i położoną na nich deskę drewnianą o ciężarze P. Deska leży poziomo, a obracające się rolki ślizgają się pod nią. Współczynnik tarcia dynamicznego rolek o deskę wynosi f. W chwili początkowej deska została umieszczona na rolkach w ten sposób, że jej środek ciężkości znalazł się na prawo od punktu leżącego w połowie odległości między osiami rolek.
Opiszcie ruch deski.
Rozwiązania szukajcie na str. 2

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 103. Ile jest na szachownicy $n \times n$ różnych kwadratów złożonych z (całych) pól szachownicy? (Dwa kwadraty uważamy za różne, gdy zbiory pól wchodzących w ich skład są różne.)

W. Mnich.

Rozwiązanie na str. 5

M 104. Rozwiązać równanie $\cos^n x - \sin^n x = 1$, gdzie n jest liczbą naturalną.
Rozwiązanie na str. 17

M 105. Udowodnić, że dla $n \geqslant 3$ zachodzi nierówność

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Rozwiązanie na str. 15