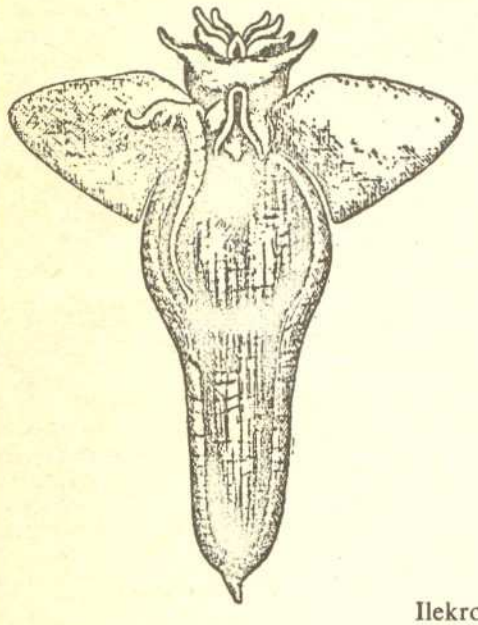
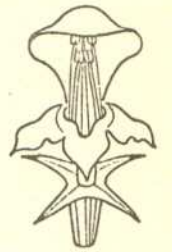
O obrocie gwiazdek śniegowych i co z tego wynika

Mgr Wiesław A. KAMIŃSKI



„Wśród milionów czarownych gwiazdek, w ich skrytym przepychu, niedostępnym dla nieuzbrojonego oka ludzkiego, nie ma dwu podobnych do siebie; bezgraniczna pomysłowość kierowała powstawaniem i nieograniczonym różnicowaniem jednego i tego samego zasadniczego schematu, równoznacznego, równokątnego sześciokąta; a każda z nich jest absolutnie symetryczna, lodowato regularna w swym kształcie..."

Tomasz Mann



Ilekroć patrzymy na greckie wazy, czy idziemy jak Hans Castrop, bohater „Czarodziejskiej Góry", wśród śniegu, narzuca się nam ich harmonia i piękno jako wyraz symetrii. Równocześnie rodzi się chęć wyjaśnienia takiego porządku, chęć zrozumienia roli symetrii w otaczających nas rzeczach i zjawiskach. Postaram się przybliżyć Tobie, Czytelniku, te zagadnienia, zatrzymując się na symetrii narzucającej się w podanych przykładach, na symetrii obrotowej.

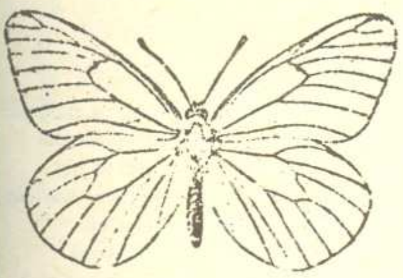
Zauważymy bez kłopotu, że w wyniku obrotu powstaje sytuacja, której nie potrafimy odróżnić od sytuacji wyjściowej. Obraz „heksagonalnego" stworu śnieżnego otrzymany przez obrót o 60°, 120°, 180°, 240°, 360°, ... nie różni się od pierwowzoru. Także obrazów wazy o powtarzającym się ornamencie, powstałych po operacji obrotu, nie jesteśmy w stanie między sobą rozróżnić. Podobne stwierdzenia możemy odnieść do obiektów, które dostrzegamy w najnowocześniejszych laboratoriach, lub o których własnościach sądzimy na podstawie pośrednich danych doświadczalnych. Wiele związków chemicznych (np. benzen) ma opisywaną symetrię. Jeżeli przypiszemy „kształt" jeszcze mniejszym obiektom, to także jądra atomowe wykazują zadziwiające i egzotyczne formy (dysku, gruszki, elipsoidy) mające określone własności symetrii. Co więcej, możemy dyskutować, w obecnej fazie rozwoju fizyki, nad symetrią jeszcze drobniejszych okruchów materii, np. nukleonów.

W każdym z podanych przykładów występuje określona cecha układu fizycznego (kształt, rozkład ładunku, rozkład masy), która mimo wykonania transformacji obrotu nie ulega zmianie. Możemy mówić w każdym takim przypadku o występowaniu symetrii obrotowej. (Analogicznie powiemy o innych symetriach. Zastanów się, proszę, Czytelniku, nad przykładami takich symetrii.) Występowanie tej symetrii w układzie fizycznym zawsze prowadzi do ograniczenia możliwych odróżnialnych położeń w przestrzeni, do uprzywilejowania tylko określonych połączeń międzyatomowych czy do ograniczenia dostępnych układowi energii. Ma to szczególne znaczenie w takich układach, w których ze względu na wielość możliwych zachowań układu i sytuacji fizycznych wprowadzane przez symetrię ograniczenia są użyteczne i pożądane.

To, co dotychczas powiedzieliśmy, nie wyczerpuje zagadnienia symetrii obrotowej i stanowi marginalną jej manifestację.

W dalszym ciągu dotkniemy pewnych fundamentalnych związków, które są charakterystyczne dla nowoczesnego podejścia w fizyce. Niestety, teoria ta nie jest zbyt poglądowa i dlatego nie pretendując do ścisłości wywodów zawierzam Twojej intuicji.

Dla fizyka, który bada zjawiska, mniej lub bardziej rygorystycznie opisując je w terminach przestrzeni i czasu, podstawowego znaczenia nabierają własności symetrii czasoprzestrzeni, o której powiedzieć możemy obrazowo, że staje się areną dla zachodzących zjawisk, ale też ma w nich swój udział. Dokonajmy obrotu układu odniesienia w przestrzeni. Wynikiem tej transformacji jest zmiana współrzędnych punktów przestrzeni. Uzasadniony wydaje się pogląd, że w wyniku tej operacji nie powinny ulec zmianie własności przestrzeni określone przez zjawiska fizyczne w niej zachodzące. Ponieważ z obrotem wiąże się zmiana wybranych kierunków w przestrzeni, poprzednie stwierdzenie jest równoważne z nadaniem przestrzeni izotropowości, tzn. równouprawnienia w niej wszystkich kierunków. Jest intuicyjnie oczywiste, że wobec tego żadne ciało nie może zmienić stanu ruchu bez ingerencji czynników zewnętrznych; nie mogą też w tych warunkach wystąpić zmiany momentu pędu ciała poruszającego się ruchem obrotowym. W ten sposób, intuicyjnie, zasada zachowania momentu pędu odniesiona zostaje do podstawowej własności przestrzeni, jej izotropowego charakteru. Zawartą w przedstawionym rozumowaniu myśl można sformułować bardziej elegancko.



Powiedzieliśmy, że w wyniku operacji obrotu ulegają zmianie współrzędne punktów materialnych układu fizycznego. Czy zatem prawa fizyki wyrażone w tych przekształconych współrzędnych mają taką samą formę jak poprzednio? Czy są one *niezmiennicze* względem takiej transformacji?
Jeżeli odpowiedź jest twierdząca, to poddając układ współrzędnych transformacji obrotu otrzymujemy taki sam opis zjawisk. Odpowiada to, zgodnie z przyjętą definicją, symetrii obrotowej przestrzeni. W ten sposób rozszerzamy ilość podstawowych pojęć do trzech, wiążąc je między sobą w następujący łańcuch

niezmienniczość ze względu na obroty — *symetria* obrotowa —
— *zasada zachowania* momentu pędu.

Łańcuch taki nie jest jedynym w fizyce. Inne symetrie i niezmienniczości prowadzą także do odpowiednich praw zachowania (pędu, energii, parzystości). Uogólniając ten wniosek wypowiemy twierdzenie należące do Emmy Noether, stanowiące jeden z najelegantszych środków badawczych współczesnego fizyka:
Jeżeli jakikolwiek izolowany układ fizyczny jest niezmienniczy ze względu na określone transformacje, to obowiązują w nim pewne prawa zachowania.

E. Noether udowodniła to twierdzenie w 1916 roku. Znaleźć je można także w pracach D. Hilberta i F. Kleina.

Chcę podkreślić, że fizycy w ostatnich dziesiątkach lat w pełni zdali sobie sprawę z fundamentalnego znaczenia tego prawa. Dzięki swojej ogólności ma ono zastosowanie w mechanice klasycznej i kwantowej i stanowi piękny przykład postępującej unifikacji różnych gałęzi fizyki.

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 124. Udowodnić, że jeżeli czworokąt wypukły ma oś symetrii, to albo można na nim opisać okrąg, albo można weń wpisać okrąg. Rozwiązanie na str. 16

M. 125. Niech X będzie dowolnym zbiorem niepustym. Udowodnić, że jeżeli funkcja $f\colon X\times X\times X \to R$ spełnia warunek

$$\bigwedge_a \bigwedge_b \bigwedge_c f(a, b, c) \leqslant f(b, a, c) \leqslant f(b, c, a),$$

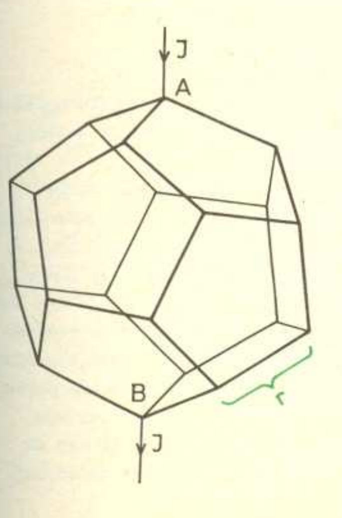
to dla dowolnej permutacji σ zbioru $\{1, 2, 3\}$ zachodzi równość

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}).$$

Rozwiązanie na str. 17

M 126. Niech $\varphi(n)$ będzie liczbą liczb naturalnych względnie pierwszych z n i nie przekraczających n. Udowodnić, że jeżeli $n > 2$, to $\varphi(n)$ jest liczbą parzystą.
Rozwiązanie na str. 17

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI



F 42. Dwadzieścia jednakowych odcinków drutu oporowego połączono w „dwunastościan" pokazany na rysunku. Opór każdego odcinka drutu wynosi r. Do przeciwległych wierzchołków A i B podłączono źródła prądu. Wyznaczyć opór zastępczy R_{AB} dwunastościanu.
Rozwiązanie na str. 15