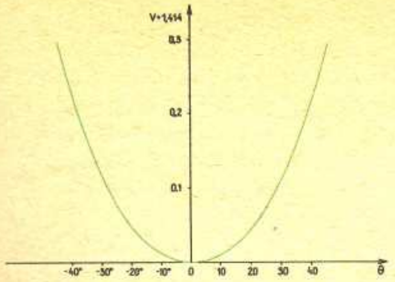
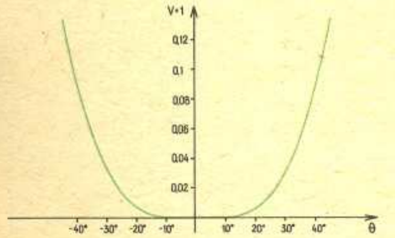
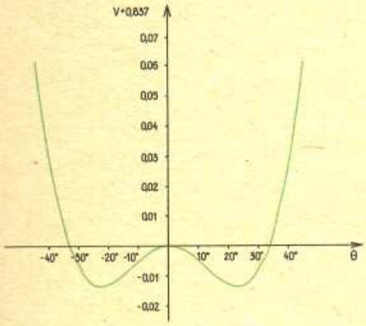


Rys. 4. Wykres potencjału $(V+1{,}414)$ dla $l = \sqrt{3}d$.



Rys. 5. Wykres potencjału $(V+1)$ dla $l = \sqrt{2}d$.



Rys. 6. Wykres potencjału $(V+0{,}837)$ dla $l = \sqrt{1{,}7}d$

Znajdujemy stąd, że dla $\theta = 0$

$$\frac{1}{Mg}\,\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{l^2-2d^2}{\sqrt{l^2-d^2}},$$

a więc dla $l > d\sqrt{2}$ mamy minimum, zaś dla $l < d\sqrt{2}$ maksimum.
Natomiast dla $\cos\theta = l/d\sqrt{2}$ znajdujemy, że

$$\frac{1}{Mg}\,\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2} = 4d\left(1-\frac{l^2}{2d^2}\right) = 4d\,[1-\cos^2\theta] = 4d\sin^2\theta > 0.$$

Wynika stąd, że jeśli istnieje rozwiązanie równania **(b)**, to opisuje ono zawsze minimum.
Powyższe wyniki można zebrać następująco. Należy rozważyć dwie sytuacje:

(A) $l \geqslant d\sqrt{2}$

oraz

(B) $l < d\sqrt{2}$.

W przypadku **(A)** istnieje tylko jedno minimum w punkcie $\theta = 0$. Punkt ten jest więc punktem równowagi trwałej. Odpowiadający mu stan równowagi ma maksymalną symetrię dozwoloną przez dynamikę układu. Rozwiązanie to jest w pełni zgodne z naszą fizyczną intuicją.
Natomiast sytuacja opisywana przez przypadek **(B)** jest diametralnie różna. Teraz potencjał ma trzy ekstrema: dwa minima i jedno maksimum. W punkcie $\theta = 0$ mamy teraz maksimum, a więc odpowiadający mu stan obdarzony maksymalną symetrią jest stanem równowagi nietrwałej.
Punktom $\theta = \pm\arc\cos(l/d\sqrt{2})$ odpowiadają minima, opisujące stany równowagi trwałej.
Widać od razu, że stany te mają uboższą symetrię niż stan dla $\theta = 0$. W rwnym jednak stopniu odbiciem symetrii wewnętrznej układu jest fakt, że jeden z tych dwóch stanów jest lustrzanym odbiciem drugiego. Na rysunku 3 przedstawiliśmy omawiane stany równowagi.
Dla lepszej ilustracji omawianej sytuacji podajemy na rysunkach wykres potencjału jako funkcji kąta θ w trzech omawianych przypadkach.
Przedstawiony na rys. 5 przypadek graniczny $l = d\sqrt{2}$ opisuje sytuację, gdy pochodna potencjału ma potrójny pierwiastek. Punkt ten nazywany jest punktem bifurkacji, ponieważ wychodzą z niego dwie gałęzie rozwiązań trwałych.
Chciałbym zachęcić Czytelnika do przeprowadzenia doświadczenia z omawianym tutaj układem dynamicznym. Będzie ono ciekawą ilustracją teoretycznych rozważań. Występujące dodatkowo tarcie pozwoli na sprawdzenie, że stan równowagi nietrwałej jest rzeczywiście stanem równowagi.
Na zakończenie chciałbym podkreślić jeszcze raz fakt pojawiania się stanów równowagi o symetrii uboższej niż maksymalna. Nic przecież w naszym modelu nie wyróżnia ani kątów dodatnich, ani ujemnych. A jednak istnieją stany równowagi trwałej wyróżniające odpowiednie znaki. Wynik ten jest związany ze zjawiskiem bifurkacji i może zachodzić jedynie w teoriach nieliniowych.

Zadania

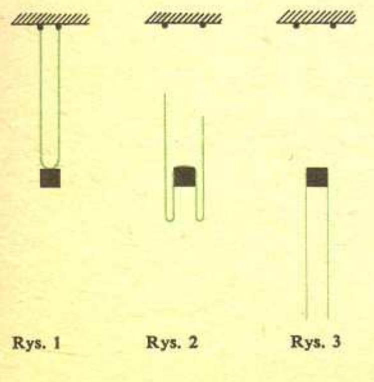
Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 151. Udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $2^{\sin x}+2^{\cos x} \geqslant 2^{1-1/\sqrt{2}}$.
Rozwiązanie na str. 6

M 152. Za 10 gwoździ, 4 haki i 1 nakrętkę zapłacono 21 zł, za 7 gwoździ, 3 haki i 1 nakrętkę — 16 zł. Ile trzeba zapłacić za 1 gwóźdź, 1 hak i 1 nakrętkę?
Rozwiązanie na str. 6

M 153. Dany wypukły kąt czwórścienny tak przeciąć płaszczyzną, by przekrojem był równoległobok.
Rozwiązanie na str. 4

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI



Rys. 1 Rys. 2 Rys. 3

F 51. Z dźwigu budowlanego urwała się cienka, wiotka, nierozciągliwa lina, która zwisając swobodnie dotykała środka nieruchomej belki podpartej na obu końcach (rys. 1). Lina spada tak, jak to pokazano na rysunkach 2 i 3. Masa liny na jednostkę długości wynosi ϱ, a jej długość — $2l$. Wiadomo, że belka pęka, jeżeli nacisk na jej środek osiąga wartość N_0. Jaki warunek muszą spełniać parametry ϱ, l i N_0, aby w czasie spadania liny belka nie pękła?
Uwaga: Zakładamy, że każdy element liny po osiągnięciu właściwego mu położenia końcowego pozostaje nieruchomy.
Rozwiązanie na str. 7