Jeśli liczby całkowite położyć na zbiorze Cantora...

Prof. dr Jerzy MIODUSZEWSKI

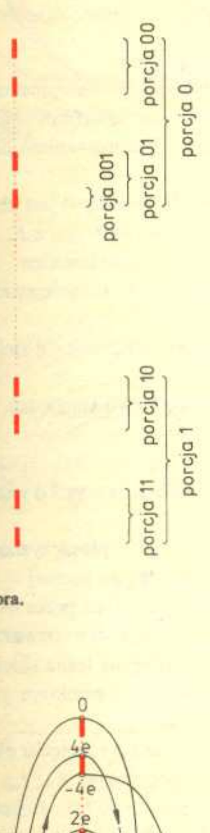
Aby dodać dwie liczby naturalne zapisane w układzie dwójkowym, np. $0+0\cdot 2+1\cdot 2^2+1\cdot 2^3$ i $1+1\cdot 2+1\cdot 2^2$, podpisujemy ich symboliczne zapisy jeden pod drugim i dodajemy tak, jak to robimy na co dzień (kierunek zapisu zależy od przyzwyczajeń):

$$\begin{array}{l} 0011 \\ \underline{111} \\ 11001 \end{array}$$

Wynik oznacza liczbę $1+1\cdot 2+0\cdot 2^2+0\cdot 2^3+1\cdot 2^4$. To formalne dodawanie zgadza się z dodawaniem prawdziwym: dodawaliśmy 12 i 7 i dostaliśmy 19.
Wyrażenia nieskończone $x_0+x_1\cdot 2+x_2\cdot 2^2+\ldots$ nie są już liczbami, ale dodawać je można: jak poprzednio, ich symboliczne zapisy $x = x_0x_1x_2\ldots$ podpisujemy jeden pod drugim dodając na każdym miejscu tak, że jeśli np. mielibyśmy dostać 2, to piszemy na tym miejscu 0, pamiętając o dodaniu na następnym miejscu 1.
To dodawanie (przemienne) czyni ze zbioru liczb dwójkowych, bo tak nazwiemy rozpatrywane wyrażenia, grupę; element $0 = 000\ldots$ jest neutralny przy tym dodawaniu.
O matematykach mówią, że biorą zbiór, na nim działanie, sprawdzają, że to jest grupa, a potem się cieszą. Ta uszczypliwość może tyczyć zamieszczonego wyżej fragmentu: fakt, że liczby dwójkowe tworzą grupę, mógłby być zatajony bez szkody dla rozumienia dalszego ciągu. Aby uniknąć zarzutów, autor postara się ten fakt wykorzystywać.

*

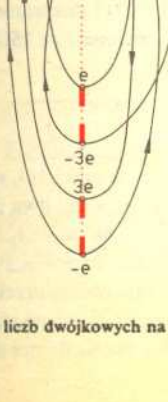
Zbiór liczb dwójkowych można zobaczyć na prostej, przypisując liczbie dwójkowej $x_0x_1x_2\ldots$ liczbę rzeczywistą $2x_0/3+2x_1/3^2+2x_2/3^3+\ldots$ Liczby te mieszczą się na odcinku $[0, 1]$ prostej: najmniejszą jest 0, a największą jest $2/3+2/3^2+2/3^3+\ldots = 1$. W licznikach ułamków brak jest jedynek (są tylko zera i dwójki). Brak jedynki przy $1/3$ znaczy brak liczb z przedziału $(1/3, 2/3)$; brak jedynki przy $1/3^2$ znaczy brak liczb z przedziałów $(1/3^2, 2/3^2)$ i $(7/3^2, 8/3^2)$. Rozpatrywane liczby tworzą więc (być może dobrze znany) zbiór Cantora, który stanowi pozostałość odcinka $[0, 1]$ po usunięciu przedziałów, które zaczęliśmy wypisywać, a których brak (oraz brak czwórki następnych) pokazany jest na rysunku.
Przedziały dopełniające zbiór Cantora do odcinka $[0, 1]$ ważne są jedynie dla poglądowości. Naprawdę ważne jest to, co po usunięciu tych przedziałów zostaje. Po usunięciu przedziału $(1/3, 2/3)$ zostają dwie porcje składające się, jedna, z liczb dwójkowych $0x_1x_2\ldots$ i, druga, z liczb dwójkowych $1x_1x_2\ldots$ Po usunięciu dwu następnych przedziałów zostają cztery porcje, każda złożona z liczb dwójkowych $00x_2x_3\ldots$, $01x_2x_3\ldots$, $10x_2x_3\ldots$ i (czwarta) z liczb $11x_2x_3\ldots$ Ogólnie, porcja n-tego rzędu to zbiór liczb dwójkowych $a_0\ldots a_{n-1}x_nx_{n+1}\ldots$, gdzie pierwszych n cyfr jest ustalonych. Niech zapis $a_0\ldots a_{n-1}$ będzie symbolem porcji.



Zbiór Cantora.

*

Liczby naturalne to wielokrotności liczby dwójkowej $e = 1000\ldots$ Oto zapisy dwójkowe kilku pierwszych z nich:
$e = 1000\ldots$
$2e = 01000\ldots$ $3e = 1100\ldots$
$4e = 001000\ldots$ $5e = 101000\ldots$ $6e = 011000\ldots$ $7e = 111000\ldots$
A oto liczby przeciwne do wypisanych wyżej:
$-e = 1111\ldots$
$-2e = 01111\ldots$ $-3e = 10111\ldots$
$-4e = 001111\ldots$ $-5e = 110111\ldots$ $-6e = 010111\ldots$ $-7e = 100111\ldots$
...
Dla obliczenia np. liczby dwójkowej $-e$ szukaliśmy liczby dwójkowej $x_0x_1x_2\ldots$, która dodana do $e = 1000\ldots$ dawałaby $0000\ldots$ Dostaliśmy liczbę dwójkową $1111\ldots$, która już nie jest liczbą w zwykłym sensie, mając w zapisie dowolnie daleko jedynki. Jeśli ktoś próbował odejmować na arytmometrze od zera jedynkę, dostając serię dziewiątek od końca, ten zdaje sobie sprawę z tego, co wyszło.
Liczby dwójkowe ze zbioru $E = \{\ldots -2e, -e, 0, e, 2e, \ldots\}$ powstają kolejno jedna z drugiej przez dodawanie e, co się na przykładzie wypisanych liczb łatwo sprawdza, a co w ogólności wynika z faktu, że liczby dwójkowe tworzą grupę. Zbiór E jest więc orbitą punktu e, jak się mówi.
Przez przyporządkowanie $n \to ne$, liczby całkowite zostały położone na zbiorze Cantora z zachowaniem działań. Ale teraz ich położenie geometryczne niczym nie przypomina położenia liczb całkowitych na prostej. Na rysunku (obok) naniesione zostały położenia liczb dwójkowych ze zbioru E od $-8e$ do $7e$; strzałki pokazują przejścia do liczby następnej.



Nanoszenie liczb dwójkowych na zbiór Cantora.

Podzbiór A przestrzeni metrycznej X nazywa się gęsty w X, gdy w każdym otoczeniu dowolnego punktu $p \in X$ są punkty zbioru A (np. zbiór liczb wymiernych na prostej). Przestrzeń metryczna X jest spójna, gdy nie da się podzielić na dwa zbiory otwarte, niepuste i rozłączne. Przestrzeń metryczna X nazywa się zwartą, gdy każdy ciąg punktów tej przestrzeni zawiera podciąg zbieżny. Odcinek z końcami jest przestrzenią zwartą i spójną. Pojęcia te są dokładnie omawiane w każdej książce z elementami topologii (np. we wzmiankowej w końcu artykułu książce A. Lelka).

Nanoszenie liczb dwójkowych na odcinek objaśnijmy na przykładzie liczby $3e = 11\,000\ldots$: leży ona w porcji 11, na jej lewym końcu, mając w zapisie zera do końca.
Orbita E jest równa zbiorowi wszystkich punktów skrajnych w porcjach, punkty $n \cdot e$ są lewymi końcami porcji, jeśli $n \geqslant 0$; są prawymi końcami porcji, jeśli $n < 0$ (wtedy zamiast zer do końca występują jedynki); nietrudny rachunek pokazuje, że wszystkie końce porcji będą wyczerpane przez liczby ne. Orbita E jest więc gęsta w zbiorze Cantora, mając punkty w każdej porcji, jakkolwiek małej.

Czy to ciekawe, że orbita pewnego punktu jest gęsta? Na okręgu, jeśli odkładać od zera stale kąt np. jednego radiana (a jest on niewspółmierny z kątem pełnym), to otrzymane punkty pokryją gęsto okrąg (można spróbować dowieść tego samemu, albo zajrzeć do książki J. F. Koksmy, *Diophantische Approximationen*, Springer, Ergebnisse der Mathematik 4, 1936, str. 10). Czy więc podobna rzecz na zbiorze Cantora miałaby już nas nie interesować? Dodajmy, że do uzyskania orbity gęstej nie potrzebowaliśmy liczb niewymiernych.

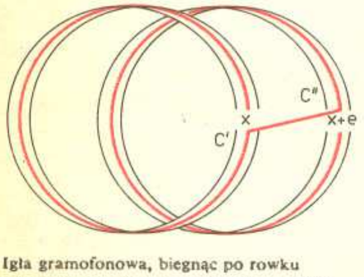
*

Za odległość liczb dwójkowych można przyjąć np. ich odległość jako punktów zbioru Cantora. Nie zmienimy istoty rzeczy, jeśli za odległość liczb dwójkowych przyjmiemy liczbę $1/n$, gdzie n jest numerem miejsca, na którym cyfry w zapisach tych liczb zaczynają się różnić w sposób istotny: za nieistotne uznajemy zaokrąglenia w rodzaju $0,\ldots100111111.\ldots \sim 0,\ldots10100000\ldots.$
Dodawanie i przypisywanie elementowi elementu przeciwnego są operacjami ciągłymi: jeśli zmienimy składniki mniej niż o $1/n$, to suma zmieni się mniej niż o $1/n-1$ (podobnie jest dla operacji $-$).

Mając element a w zbiorze Cantora, weźmy pod uwagę odwzorowanie, nazywane przesunięciem o a, przypisujące elementowi x zbioru Cantora element $x+a$. Jest to homeomorfizm zbioru Cantora na siebie: ciągłość była wyjaśniona, a przesunięcie o $-a$ jest odwzorowaniem odwrotnyn ciągłym w myśl poprzedniej uwagi.
Przesunięcie $E+a$ zbioru E o a (tak ten zbiór przesunięty oznaczymy i nazwiemy) jest zbiorem homeomorficznym z E. Jeśli $a \in E$, to $E+a = E$. Jeśli $a \notin E$, to $E+a$ jest rozłączne z E. Więcej, różne przesunięcia zbioru E są rozłączne. Sprawdza się to prostym rachunkiem robionym w każdym systematycznym wykładzie o grupach; np. w książce B. Gleichgewichta, *Algebra*, rozdział XII, twierdzenie 12.4.
Zbiory $E+a$ są przeliczalne. Wszystkie razem pokrywają zbiór Cantora. Różnych od siebie przesunięć zbioru E jest więc continuum.
Jeśli zbiór $E+a$ przesunąć o e, to dostanie się znowu zbiór $E+a$, co się łatwo sprawdza.

*

C i C' są przeciwległymi tworzącymi „powierzchni walcowej" powstałej w opisany obok sposób.



Igła gramofonowa, biegnąc po rowku dochodzącym do x, przeskakuje na rowek wychodzący z $x+e$.

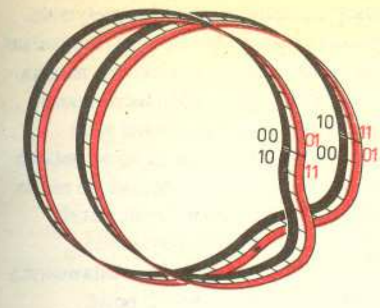
Z liczb dwójkowych zrobimy teraz użytek, co przy okazji pozwoli zobaczyć wszystko jeszcze raz inaczej i, być może, wyraźniej.
Przez punkty zbioru Cantora przeprowadźmy jednakowej wielkości okręgi w płaszczyznach prostopadłych do osi x-ów, na której zbiór Cantora leży, i mających środki na prostej równoległej do osi x-ów. Bardziej formalnie: utwórzmy produkt zbioru Cantora przez okrąg. Ale teraz rozetnijmy tak powstałą wiązkę okręgów wzdłuż zbioru Cantora, który rozważamy. Na miejscu zbioru Cantora powstały dwa zbiory Cantora, C' i C''. Spróbujmy teraz skleić całą rzecz z powrotem, ale inaczej, a mianowicie tak, by punkt x na C' skleił się z punktem $x+e$ na C''.
To, co powstało, nie jest już niespójną wiązką okręgów. Odcinki powstałe po rozcięciu okręgów, przechodzące przez punkty orbity E punktu e, połączyły się w łańcuch odcinków $\{\ldots I_{-2}, I_{-1}, I_0, I_1, I_2, \ldots\}$: jeśli odcinkom wiązki nadać zwrot od C' do C'', to wygląda to tak, że koniec ne odcinka I_n skleił się z początkiem $(n+1)e$ odcinka I_{n+1}. Wspomniane odcinki dają w sumie linię, która jest obrazem ciągłym i wzajemnie jednoznacznym prostej i która jest gęsta w całości, bo powstaje z sumy okręgów przechodzących przez punkty orbity E, gęstej w zbiorze Cantora. Całość, zawierając podzbiór gęsty i spójny, jest spójna. Jest też zwarta, bo wiązka odcinków, z której powstała, była zwarta. Całość jest więc kontinuum.
Kontinuum to nazywane jest solenoidem. Było odkryte przez Vietorisa (1927) i dokładnie zbadan przez van Dantziga (*Über topologisch homogene Kontinua*, *Fundamenta Mathematicae* **15**(1930), str. 104–125).

*

Solenoid = zwojnica.
Termin „kontinuum" oznacza tu przestrzeń metryczną zwartą i spójną. „Continuum" to tzw. liczba kardynalna, wyrażająca ilość wszystkich liczb rzeczywistych.

Opis solenoidu można bardziej unaocznić.
W pierwszym przybliżeniu, zbiór Cantora to dwa odcinki rozłączne, oba o długości 1/3, w których leżą porcje pierwszego rzędu. Pierwsze przybliżenie solenoidu to sklejenie brzegami dwu pasm nad tymi odcinkami. Przy przesunięciu o e porcja 0 przechodzi na porcję 1 i na odwrót. Rysunek dalej przedstawia sklejanie pasm pierwszego rzędu według tego przybliżonego przepisu. Przy sklejaniu, mając pasma położone tak, że miałyby się zwinąć na powierzchnię walca, przekładamy je miejscami, właśnie tak jak na rysunku. Jednakże po takim sklejeniu pasma drugiego rzędu nie skleją się w sposób odpowiadający sklejaniu się porcji drugiego rzędu: porcja 00 ma przejść

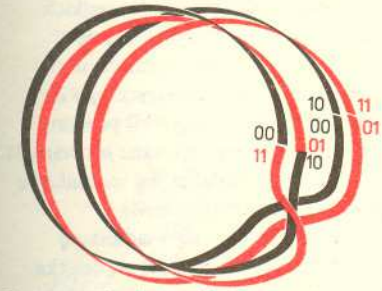
na porcję 10, porcję 10 na porcję 01, porcja 01 na porcję 11, a porcja 11 znów na porcję 00. Aby uczynić zadość tym warunkom, wystarczy na jednym ze sklejeń przełożyć miejscami pasma tak, aby 11 przeszło na 00, tak jak na rysunku niżej. Otrzymujemy znowu wstęgę spójną. W przekroju wszystkich budowanych kolejno wstęg dostaje się linie. Mogły one równie dobrze powstać jako przekrój kabli (torusów) biegnących tak samo, jak przedtem wstęgi. Można by pomyśleć, że po tych kablach płynie wkoło prąd.



Pasma pierwszego rzędu dają w sumie wstęgę spójną (zakreskowana). Pasma drugiego rzędu dają w sumie dwie wstęgi (czarną i czerwoną)

W interpretacjach fizycznych nie warto iść za daleko: jeśli chcielibyśmy pomyśleć, że i po liniach solenoidu płynie prąd, to stwierdzilibyśmy, że jego strumień rozpadł się na continuum części (mimo że w przybliżeniach był zawsze tylko jeden strumień). Jedna z tych części to linia, o której była już mowa, powstała z odcinków przechodzących przez punkty orbity E. Resztę linii dostaniemy przesuwając orbitę E (Pamiętamy, że zbiory $E+a$ przechodzą każdy na siebie przy przesunięciu o e). To zapewnia sklejanie się ze sobą dwu egzemplarzy zbioru $E+a$, jednego na C' i drugiego na C'', i połączenia się wszystkich odcinków przechodzących przez punkty zbioru $E+a$ w jedną linię, taką samą jak ta, która przechodzi przez punkty zbioru E.

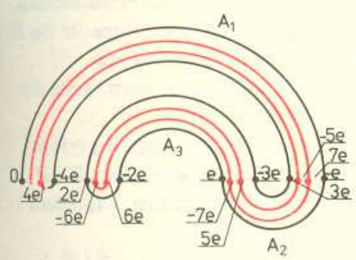
Paradoks z rozpadem strumienia prądu jest, jak wiele tzw. paradoksów nieskończoności, pozorny: dotyczy nie zjawiska, lecz wyobrażeń, które w sytuacjach granicznych przestają pełnić swoją poprzednią rolę.



Teraz pasma drugiego rzędu dają w sumie wstęgę spójną.

*

Każde kontinuum zawarte w solenoidzie, różne od całości, jest odcinkiem jednej z continuum linii, na które rozpada się solenoid; wydaje się to na tyle widocznym (czyżby?), żeby opuścić dowód (wątpliwości te można pogłębić: jeśliby w przeprowadzonej konstrukcji posłużyć się nie zbiorem Cantora, lecz okręgiem, na którym obrót o jeden radian spełniałby rolę przesunięcia o e, to dostalibyśmy również continuum linii rozłącznych, które wszakże dają w sumie powierzchnię torusa, i wypowiedziane zdanie przestaje być prawdziwe). Taki odcinek jest położony w sumie skończonej ilości odcinków wiązki odcinków przechodzących przez punkty zbioru Cantora, z której solenoid powstał. Jest więc rzadki w solenoidzie (bo wspomniana suma skończona jest rzadka w wiązce; rzadka — znaczy nigdzie (nie) gęsta). Kontinua takie, że kontinua w nich zawarte, różne od całości, są zawsze rzadkie, nazywane są nierozkładalnymi. Nazwa bierze się stąd, że nie można przedstawić takiego kontinuum jako sumy dwu kontinuów różnych od całości; nie można, bo suma dwu zbiorów rzadkich jest zbiorem rzadkim. Solenoid jest właśnie takim kontinuum nierozkładalnym.



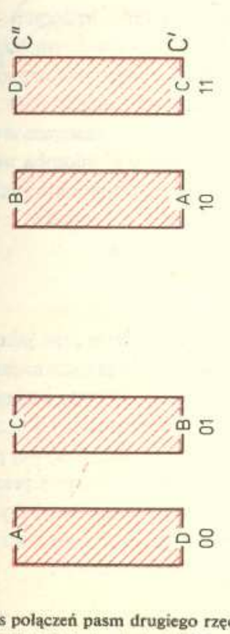
*

A oto inne kontinuum nierozkładalne, którego konstrukcja może być podpowiedziana przez budowę zbioru liczb dwójkowych, jeśli przyjrzeć się wzajemnemu położeniu liczb dwójkowych x i $-x$.

Mając na uwadze kolejność $0, -e, e, -2e, 2e, \ldots$ punktów orbity E, połączmy punkty 0 i $-e$ górą półokręgiem, punkty $-e$ i e dołem półokręgiem, a potem znów górą półokręgiem punkty e i $-2e$, i podobnie dalsze, jak na rysunku. Dostaniemy łańcuch łuków, $A_1, A_2, A_3, \ldots$ (p. rysunek obok), których suma jest obrazem ciągłym i wzajemnie jednoznacznym półprostej $[0, \infty)$. Rozszerzmy ten sposób łączenia półokręgami dołem na wszystkie pary złożone z punktów x i $-x$, i półokręgami górą na wszystkie pary złożone z punktów x i $-(x+e)$, symetrycznych względem środka zbioru Cantora. Powstaje kontinuum nierozkładalne, którego opis tu podany pochodzi od Bronisława Knastera.

*

Trudno było tu powiedzieć wiele o liczbach dwójkowych, o solenoidzie, czy też o opisanym tu kontinuum Knastera. Liczby dwójkowe to inaczej liczby 2-adyczne, szczególny przypadek liczb p-adycznych (p. artykuł Krystyny Wojtków, Delta nr 9/1978; systematyczny wykład można znaleźć w książce W. Narkiewicza, *Teoria liczb*, Biblioteka Matematyczna 50, PWN, Warszawa 1977, na str. 327–339). Pokazaliśmy z grubsza, jak zobaczyć liczby p-adyczne. Przypadek $p = 2$ oddaje w dużym stopniu istotę rzeczy. Dodajmy jednak, że była tu mowa jedynie o tzw. liczbach 2-adycznych całkowitych (rozwinięcia rozciągają się w jedną stronę, a można by pomyśleć, że w obie).



Inny opis połączeń pasm drugiego rzędu (sklej paski, doklejając A do A, B do B itd.).

Najlepszą początkową lekturą na temat kontinuów nierozkładalnych jest odpowiedni rozdział (str. 82–96) książki A. Lelka, *Zbiory*, Biblioteczka Matematyczna 26, PZWS, Warszawa 1966. Solenoid jest grupą, czego nie zobaczyliśmy, ale od czego nie byliśmy daleko (p. książka D. Montgomery'ego i L. Zippina, *Topological transformation groups*, New York 1955, str. 66; na str. 48 jest tam mowa o liczbach dwójkowych).

Kontinuum Knastera powstaje z solenoidu przez utożsamienie punktów p i $-p$, gdzie $-p$ oznacza element przeciwny do p w solenoidzie jako grupie. Kontinuum to, poza obrazem półprostej, składa się z continuum linii, które są obrazami ciągłymi i wzajemnie jednoznacznymi całej prostej. Nie wiadomo, czy wszystkie te pozostałe linie są homeomorficzne, chociaż David Bellamy (którego praca sprzed kilku lat, nie opublikowana, inspirowała autora do napisania tego artykułu) dowiódł homeomorficzności niektórych z nich.