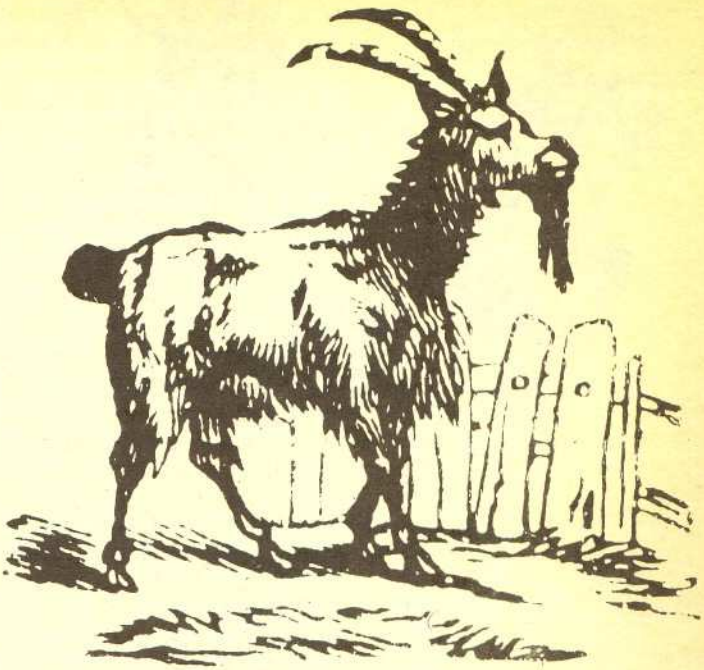
Bajka o trójkącie

Czyż zawsze o lwie, wilku i liszce hultajce?
Nie, nic o nich nie powiem w mojej pierwszej bajce.
Choć się w pierwszym mym kroku nowością zalecę:
Powiem bajkę o zacnym trójkącie ABC.
Raz wielki matematyk, nad ludzi wzniesiony,
Mierząc gwiazdy, planety, licząc milijony,
Trójkąt rozwartokątny na świstku nakryślił,
Spojrzał w niebo — i nie wiem o czym się zamyślił.
Wtem hałas i krzyk wielki. Co znaczą te wrzaski?
W trójkącie zakreślonym wszczęły się niesnaski:
Kąt C był szeroki i wielce rozwarty,
Więc jak magnat, zwyczajnie dumny i uparty,
Z pogardą na dwa inne kąciki spoglądał.
Kosztem ich jeszcze więcej rozszerzyć się żądał.
Fuknął: „Po co te chude i liche stworzenia
Wyglądają tam nędznie spod mego ramienia?"
Wtem kąt ostry: „Naszą nam nie wyrzucaj małość,
Na niej się to opiera twoja okazałość:
Im my mniejsi, tymeś ty większy, Mości Kącie;
Lecz nikt się nie obejdzie i bez nas w trójkącie.
Niech kto jak chce podobnych wam kątów namnoży,
Z samych kątów rozwartych trójkąt się nie złoży,
A my się bez was, wielkich, łatwo obejdziemy —
— Sami go sobie zrobiemy".

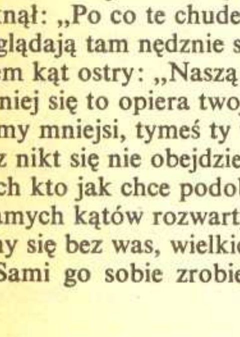


(*Wiktor LENKIEWICZ*, 1816, r.
cytat wg „*Cicer cum caule czyli groch z kapustą*" *Juliana TUWIMA*)

Rozstrzygnięcie konkursu o trójkącie

W numerze 12/78 ogłosiliśmy konkurs pod hasłem „Znaleźć nowe twierdzenie o trójkącie". Otrzymaliśmy prace 24 Czytelników, wiele osób nadesłało po kilka twierdzeń. Oto lista uczestników konkursu: Grzegorz Banaszak z Gostynia, Grzegorz Dziewęcki ze Świecia nad Wisłą, Ewa Florko z Małomic, Tadeusz Gawski z Tarnowa, Maciej Józefczuk z Wrocławia, Jacek Kulik z Nowego Sącza, Tomasz Kwinta ze Szczawna Zdroju, Tomasz Maszczyk z Olsztyna, Adam i Mirosław Matlęgowie ze Skoczowa, Bogusław Miszczyk z Kielc, Waldemar Lewandowski z Bełchatowa, Stefan Pietrzak z Przemyśla, Sławomir Prochocki z Ełku, Krzysztof Przewłocki z Opola, Grażyna Rewińska z Limanowej, Jerzy Siwek z Różana, Romuald Szoka z Łodzi, Małgorzata Toper z Lubienia, Ryszard Wojtkiewicz z Sieradza, Andrzej Zadrożny z Wrocławia, Krzysztof Zawadzki z Gdańska. Dwa listy nie zawierały nazwiska nadawcy.

Za najciekawsze z nadesłanych uznaliśmy następujące



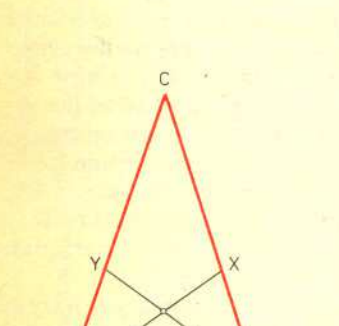
Rys. 1. Jeżeli AC i AB mają się do siebie w stosunku złotym, to AX i AO też.

Twierdzenie. *Jeżeli w trójkącie równoramiennym długość boku ma się do długości podstawy w stosunku „złotym"* $\left(\text{tj. } 1:\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, *to dwusieczne kątów przy podstawie też dzielą się w „złotym" stosunku* (rys. 1).

Autorem tego twierdzenia jest *Mirosław MATLĘGA* ze Skoczowa.

Jest to w zasadzie „twierdzenie o jednym trójkącie,, (bo wszystkie trójkąty spełniające powyższe założenia są podobne), ale własność, którą dostrzegł i udowodnił autor, jest oryginalna i bardzo ciekawa (dlaczego akurat dwusieczne?).

Dowód autora opiera się na obliczeniu długości wszystkich potrzebnych odcinków i jest żmudny. Po obliczeniu, że kąt przy podstawie danego trójkąta wynosi 72°, można było skorzystać z podobieństwa odpowiednich trójkątów (AXB, ABC, i BOX na rysunku 1). Można było także sprowadzić dowód twierdzenia do wniosku z niego: przekątne pięciokąta foremnego dzielą się w stosunku złotym (rys. 2). Takie twierdzenie jest spotykane w literaturze dość często.



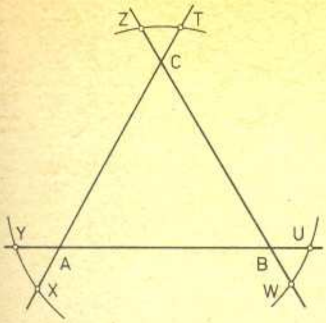
Rys. 2. Przekątne pięciokąta foremnego dzielą się w stosunku złotym.

Na drugim miejscu postawiliśmy twierdzenie brzmiące jak następuje:

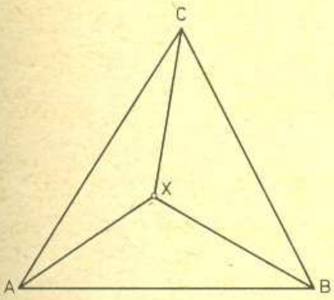
Na przedłużeniach boków dowolnego trójkąta ABC odkładamy odcinki AX, AY, CZ, CT, BU, BW tak, by ich długości były proporcjonalne do długości boków, na których przedłużeniach leżą:

$$\frac{|AX|}{|AC|} = \frac{|AY|}{|AB|} = \frac{|CZ|}{|BC|} = \frac{|CT|}{|AC|} = \frac{|BU|}{|AB|} = \frac{|BW|}{|BC|}.$$

Wówczas punkty X, Y, Z, T, U, W leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt jest równoboczny.



Rys. 3



Rys. 4

Autorem tego twierdzenia jest *Grzegorz BANASZAK* z Gostynia. Uznaliśmy, że pewną skazą na elegancji tego interesującego twierdzenia jest jego „oczywistość" („jeśli się dobrze przyjrzeć, to musi tak być"). Przysłany przez autora dowód jest także zbyt zawiły. Wykorzystując fakt, że każdy trójkąt można otrzymać z trójkąta równobocznego przez rzutowanie, dowód mógłby być napisany w kilku linijkach.

Na „brązowy medal" zasłużyło naszym zdaniem

Twierdzenie. *Trójkąt można na co najwyżej jeden sposób podzielić na trzy trójkąty o równych obwodach* (rys. 4) nadesłane przez *Waldemara LEWANDOWSKIEGO* z Bełchatowa. Dokładniej istnieje co najwyżej jeden punkt X taki, że trójkąty ABX, ACX, BCX mają równe obwody.

To twierdzenie zdobyłoby wyższą lokatę, gdyby autor zadbał o precyzyjne uzasadnienie, dlaczego (i czy w ogóle) punkt o żądanych własnościach istnieje. Jest to bowiem nieco trudniejsze zadanie.

Przyznaliśmy też dwa „wyróżnienia" dla młodszych uczniów *Adama MATLĘGI* ze Skoczowa i *Ewy FLORKO* z Małomic. Przysłane przez nich prace zawierały twierdzenia znane (i spotykane nawet w niektórych podręcznikach), jednak przysłane przez autorów sformułowania, dowody i wnioski świadczą o samodzielności i pewnych „zdolnościach badawczych" autorów. Dziękujemy wszystkim uczestnikom, a zwycięzcom wysyłamy nagrody.

A oto kilka spostrzeżeń dotyczących konkursu

1. Nie nadeszła żadna praca z Warszawy (gdyby konkurs dotyczył filozofii matematyki, to z samego XIV Liceum im. Klementa Gottwalda otrzymalibyśmy pewnie kilkanaście listów).
2. Autorzy popełniali dużo błędów logicznych, polegających przeważnie na tym samym: zakładali, że ich twierdzenie jest prawdziwe, i opierając się na tym dochodzili do jakiegoś znanego twierdzenia i konkludowali „doszliśmy do zdania prawdziwego, więc i wyjściowe twierdzenie jest prawdziwe, c.b.d.o." (nic dziwnego, skoro na początku przyjęło się, że tak jest!). Błędów tego typu było zbyt wiele.
3. Sporo dowodów można było uprościć i zdecydowanie leżało to w zasięgu możliwości autorów.
4. Kilka twierdzeń stanowiło inną wersję dobrze znanych podręcznikowych własności. Kto z Czytelników dostrzeże od razu związek twierdzenia
   Jeżeli boki dowolnego trójkąta stanowią średnice okręgów, to odcinki łączące punkty przecięcia boków lub ich przedłużeń tymi okręgami z przeciwległymi wierzchołkami tego trójkąta przecinają się w jednym punkcie,
   z
   Wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie?
5. Otrzymaliśmy 3 uogólnienia twierdzenia Pitagorasa, wszystkie sprowadzające się do następującego
   Jeżeli na bokach trójkąta prostokątnego zbudujemy figury podobne, to pole figury zbudowanej na przeciwprostokątnej jest sumą pól dwu pozostałych figur,
   zamieszczonego np. w książce „Czy umiecie się dziwić" (Ossolineum 1978). Takiego twierdzenia Pitagorasa uczyli się m.in. Kościuszko i Mickiewicz.

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof NOWINSKI

M 199. Niech w trójkącie ABC będzie $CA \neq CB$. Wykazać, że punkt przecięcia symetralnej odcinka $\overline{AB}$ z dwusieczną kąta ACB leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.
Rozwiązanie na str. 12

M 200. Zbudować trójkąt mając dane długości h, d, m odpowiednio: wysokości poprowadzonej z wierzchołka A, dwusiecznej kąta CAB i środkowej odcinka $\overline{BC}$. Zakładamy, że $h < d < m$.
Rozwiązanie na str. 9

M 201. Czy w sześcianie o krawędzi długości 1 można zmieścić kwadrat o boku dłuższym niż 1?
Rozwiązanie na str. 10

Redaguje dr Halina ABRAMOWICZ

F 67. Rozpryskiwacz do polewania trawnika ma nasadkę sferyczną (kąt rozwarcia $2\alpha_0 = 90°$, patrz rysunek) z dużą liczbą jednakowych otworów. Jeśli otwory są rozmieszczone równomiernie, to trawnik nie będzie polewany równomiernie. Jaki powinien być rozkład liczby otworów na powierzchni nasadki, aby trawnik był polewany równomiernie. Zakładamy, że promień nasadki jest mały w porównaniu z rozmiarami trawnika i że nasadka jest położona na jednym poziomie z powierzchnią trawnika.
Rozwiązanie na str. 11