Mierzenie jest stare jak myślenie

Dr Wojciech WOJTYŃSKI

W swojej najprostszej postaci mierzenie polega na ocenianiu jakościowym przedmiotów lub ich zbiorów prowadzących do określeń typu duży-mały, lekki-ciężki, wysoki-niski, krótki-długi. W bardziej zaawansowanej formie — kiedy chcemy porównać („zmierzyć") skończone podzbiory jakiegoś zbioru o podobnych („identycznych") elementach, jest liczeniem. Wprowadzamy kryterium porównawcze: miarę zbioru, która jest liczbą jego elementów. Znacznie bardziej zawiła staje się sytuacja dla zbiorów nieskończonych. Idea wszelkiego pomiaru pozostaje jednak zawsze taka sama — pomiar polega na porównywaniu „dużych" zbiorów przez ich podział na małe („regularne") przystające części.

Jedną z praktycznie najoczywistszych czynności związanych z mierzeniem jest pomiar długości odcinków. Już starożytni Grecy natrafili tu na znamienną trudność — istnienie odcinków niewspółmiernych — której analiza doprowadziła między innymi do sprecyzowania pojęcia liczby rzeczywistej (znowu mierzenie = liczenie), pojęcia granicy ciągu liczbowego itp. Rzeczy te są na ogół dobrze znane, a właściwe trudności związane z mierzeniem jeszcze przed nami. Zakładając, że umiemy mierzyć długości odcinków, postaramy się rozszerzyć pojęcie „miary" (czyli „długości" odcinka) na większą klasę podzbiorów prostej rzeczywistej. Zaczniemy od sprecyzowania podstawowego naszego celu

CO CHCEMY MIERZYĆ I CO TO ZNACZY MIERZYĆ?

Jak to zwykle bywa, zamiast odpowiedzieć na powyższe pytania matematyk — po rozważeniu pewnej liczby przykładów „wziętych z życia" odwraca sytuację — wprowadza pewien schemat formalny, a następnie usiłuje nagiąć do niego inspirujące go przykłady.

W przypadku mierzenia jego refleksja wygląda tak. Mamy zbiór Ω (np. prosta liczbowa R^1). Obiektami, które chcemy mierzyć, są pewne podzbiory zbioru Ω. Czynności mierzenia nie będzie, natomiast pewne zbiory będą miały przyporządkowane liczby określające ich wielkość — miarę zbioru. Dopuścimy także możliwość posiadania przez zbiór miary równej $+\infty$. Mówiąc inaczej, na pewnej rodzinie podzbiorów zbioru Ω określona będzie funkcja μ przyporządkowująca zbiorowi A liczbę $\mu(A)$ — jego miarę. Wartości funkcji μ są więc liczbami rzeczywistymi lub „nieskończonością".

Jak zauważyliśmy już wcześniej — pomiar polega na „porównywaniu dużych zbiorów przez podział na małe". W związku z tym, jeżeli jakiś zbiór A przedstawimy jako sumę rozłącznych podzbiorów $B_1, B_2, \ldots, B_k$ oraz jeżeli określone są liczby $\mu(B_i)$, $i = 1, \ldots, k$, powinniśmy mieć $\mu(A) = \mu(B_1) + \ldots + \mu(B_k)$. Na przykład w przypadku zbioru składającego się z odcinków $[0, 1]$, $[2, 3]$ i $[4, 5]$ rozsądne jest, aby jego miara (mająca być uogólnieniem „długości") była równa sumie długości tych odcinków. Tego typu rozważania prowadzą do następującego postulatu

$$(0) \quad \text{Jeżeli } A = B_1 \cup \ldots \cup B_k \quad \text{oraz} \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{dla} \quad i \neq j \quad \text{to} \quad \mu(A) = \sum_{i=1}^{k} \mu(B_i),$$

zwanego warunkiem addytywności funkcji μ. Oczywiście zakładamy tu, że $A, B_1, B_2, \ldots, B_k$ należą do rodziny podzbiorów, na których określona jest miara μ.

Jak już powiedzieliśmy, μ ma być funkcją. Co jest więc jej dziedziną? Jest to najbardziej delikatna część sprawy. Patrząc na warunek (0) łatwo się domyślić, że rodzina Σ podzbiorów, na których określona jest μ („rodzina zbiorów mierzalnych"), powinna mieć własność:

(1) Jeżeli $B_i \in \Sigma$, $i = 1, 2, \ldots, k$ oraz $A = B_1 \cup \ldots \cup B_k$, to także $A \in \Sigma$.

Okazuje się, że dla uzyskania rozsądnej i interesującej teorii trzeba narzucić na Σ następujące naturalne warunki

(2) Ω oraz $\emptyset$ (zbiór pusty) należą do Σ.

(3) Jeżeli $A \in \Sigma$ oraz $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \emptyset$, to $B \in \Sigma$.

Z warunków (1), (2), (3) wynika, że

Jeżeli $C_i \in \Sigma$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ oraz $D = C_1 \cap C_2 \ldots \cap C_k$, to także $D \in \Sigma$.

Rodzinę podzbiorów ustalonego zbioru Ω spełniającą warunki (1), (2), (3) nazywamy ciałem zbiorów. Schemat formalny, o którym mówiliśmy, polega więc na

1) wyróżnieniu ciała podzbiorów Σ zbioru Ω,

2) określeniu na Σ funkcji μ przyjmującej wartości w zbiorze $[0, +\infty]$ i spełniającej warunek (0).

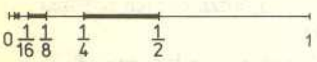
CZY ISTNIEJĄ MIARY?

Mamy już więc pogląd na to, co chcemy rozumieć przez miarę i mierzenie, ale to nie znaczy, że umiemy jakąś miarę podać. O nie, przepraszam, jeden przykład jest: niech ciało zbiorów składa się tylko z $\emptyset$ i Ω, oraz $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\Omega) = a$, gdzie a jest pewną liczbą dodatnią, dowolnie obraną. Nietrudno znaleźć i drugi, mniej banalny przykład miary: Σ składa się ze wszystkich podzbiorów skończonych ustalonego zbioru Ω, oraz z ich uzupełnień, natomiast miarę zbioru określamy jako liczbę jego elementów (przyjmując, rzecz jasna, $+\infty$ dla zbiorów nieskończonych).

Zamiast podawać coraz to inne przykłady takiego typu, przejdźmy jednak do postawionego na początku zagadnienia, które obecnie możemy już precyzyjnie sformułować:
Czy istnieje ciało podzbiorów Σ prostej R^1 zawierające wszystkie odcinki oraz miara μ określona na Σ, która dla odcinków przyjmuje wartość równą ich długości?
Ciała podzbiorów o wymienionej własności łatwo podać (np. ciało wszystkich podzbiorów prostej), aby jednak poradzić sobie z drugą częścią zadania, przezorność nakazuje wybrać możliwie najmniejsze takie ciało (żeby nie mieć zbyt dużych kłopotów z istnieniem funkcji μ). Takie ciało będą tworzyły wszystkie podzbiory R^1, jakie możemy uzyskać za pomocą stosowania skończonej liczby działań dodawania i tworzenia części wspólnej poczynając od zbioru odcinków. Nie podamy tu dowodu istnienia miary o powyższych własnościach. Miara taka (zwana miarą Peano-Jordana) istnieje i jest jednoznacznie wyznaczona na opisanym najmniejszym ciele zawierającym odcinki. Zasygnalizujemy jedynie kilka trudności powstających przy tej konstrukcji.

MIERZYMY ZBIORY: OD ZEWNĄTRZ CZY OD WEWNĄTRZ?

Podzieliliśmy zadanie określenia miary na dwie części: określenie ciała zbiorów i konstrukcji samej miary. Jest to droga naturalna, ale zwykle nie najprostsza. Okazuje się, że lepiej jest określić na rodzinie wszystkich podzbiorów zbioru Σ dwie funkcje stanowiące razem pewne „przybliżenie" miary — pierwsza z nich mierzy zbiory „od zewnątrz" i nazywa się miarą zewnętrzną, druga mierzy zbiory „od wewnątrz" i wobec tego nazywa się miarą wewnętrzną. Okazuje się, że zbiory, dla których miara wewnętrzna i zewnętrzna są równe, tworzą ciało i na nim obie funkcje są addytywne, wyznaczając miarę. Zatem sama metoda konstrukcji miary wyznacza tu jej dziedzinę — ciało zbiorów. Zilustrujemy to na kilku przykładach:
Przykład 1. Niech A będzie zbiorem będącym sumą odcinków



$$\left[\frac{1}{2^{2n}}, \frac{1}{2^{2n-1}}\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{(rysunek)}$$

Chcąc zmierzyć zbiór A od wewnątrz, będziemy się starali znaleźć skończoną rodzinę rozłącznych przedziałów zawartych w A o możliwie dużej sumie długości. Mierząc zbiór A od zewnątrz będziemy starali się zawrzeć zbiór A w zbiorze będącym sumą (niekoniecznie skończoną) odcinków o jak najmniejszej sumie długości.
Bardziej precyzyjnie: w celu określenia miary zewnętrznej dowolnego zbioru B rozpatrzmy rodzinę P zbiorów zawierających B jako podzbiór i będących skończonymi sumami przedziałów posiadających co najwyżej wspólne końce. Dla zbioru $C \in P$ niech jego miara będzie określona jako suma długości tworzących go przedziałów.
Określmy teraz miarę zewnętrzną $\mu_z(B)$ zbioru B jako kres dolny miar zbiorów rodziny P.
Miarę wewnętrzną $\mu_w(B)$ zbioru B wygodnie będzie teraz określić wzorem
$\mu_w(B) = \mu_z(C) - \mu_z(C \setminus B)$, gdzie C jest dowolnym zbiorem rodziny P (trzeba w tym celu wykazać, że $\mu_w(B)$ nie zależy od wyboru C).
Wróćmy do przykładu 1. Dla znalezienia miary zewnętrznej opisanego tam zbioru A możemy pokrywać A kolejno zbiorami C_k postaci

$$C_k = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right] \cup \ldots \cup \left[\frac{1}{2^{2k}}, \frac{1}{2^{2k-1}}\right] \cup \left[0, \frac{1}{2^{2k+1}}\right].$$

$$\text{Wtedy } \mu(C_k) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^k}{1-\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{2k+1}}$$

i jak łatwo wykazać $\qquad \mu_z(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(C_k) = \frac{1}{3}.$

Podobnie obliczymy miarę wewnętrzną. Mamy $\qquad \mu_w(A) = \mu_z\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) - \mu_z\left(\left[0, \frac{1}{2}\right] \setminus A\right),$

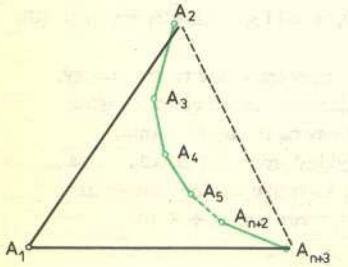
gdzie $\left[0, \frac{1}{2}\right] \setminus A = \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{16}, \frac{1}{32}\right] \cup \left[\frac{1}{128}, \frac{1}{64}\right] \cup \ldots$

Otrzymamy więc (analogicznie jak dla zbioru A)

$$\mu_z\left(\left[0, \frac{1}{2}\right] \setminus A\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \ldots + \frac{1}{2^{2n+1}}\right) + \frac{1}{2^{2n+2}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots\right) = \frac{1}{8} \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots\right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$$

i wobec tego $\mu_w(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Widzimy zatem, że miara wewnętrzna zbioru A jest równa jego mierze zewnętrznej. Nie zawsze jednak tak jest. Oto

Rozwiązanie zadania M 202
Narysujmy dowolny trójkąt na płaszczyźnie i oznaczmy jego wierzchołki przez A_1, A_2, A_{n+3}. Wewnątrz tego trójkąta obierzmy punkty $A_3, \ldots, A_{n+2}$ tak, aby wielokąt $A_2, A_3, \ldots, A_{n+3}$ był wypukły. Szukanym wielokątem jest $A_1, \ldots, A_{n+3}$. Istotnie, przekątne A_1A_i, gdzie $2 < i < n+2$ leżą wewnątrz niego, a wszystkie pozostałe są przekątnymi wypukłego wielokąta $A_2, \ldots, A_{n+3}$ i wobec tego leżą na zewnątrz wielokąta $A_1, \ldots, A_{n+3}$.



Przykład 2. Niech A będzie zbiorem wszystkich liczb wymiernych z odcinka [0, 1]. Jak wiadomo, liczby wymierne leżą gęsto na osi liczbowej — to znaczy pomiędzy dwiema liczbami rzeczywistymi znajduje się liczba wymierna (a nawet nieskończenie wiele). Również liczby niewymierne leżą gęsto na osi liczbowej (tak leżą np. liczby $\pi + w$, gdzie w przebiega zbiór wszystkich liczb wymiernych). Wobec tego, chcąc pokryć zbiór A skończoną liczbą odcinków, musimy zarazem pokryć tymi odcinkami przedział [0, 1]. To samo dotyczy zbioru $[0, 1] \setminus A$. Zatem $\mu_z(A) = 1$, zaś $\mu_w(A) = 1 - \mu_z([0, 1] \setminus A) = 1 - 1 = 0$.

UWAGI KOŃCOWE

Podana definicja miary wewnętrznej i zewnętrznej określa je dla dowolnych (a nie tylko pewnych) podzbiorów prostej. Ceną, jaką płacimy za to rozszerzenie, są słabsze (niż dla miar) własności addytywności miary wewnętrznej i zewnętrznej. Nietrudno sprawdzić, że jeżeli $A = B_1 \cup \ldots \cup B_k$, to $\mu_z(A) \leqslant \mu_z(B_1) + \ldots + \mu_z(B_k)$, ale nie możemy twierdzić, że zawsze zachodzi równość, nawet gdy zbiory $B_1, \ldots, B_k$ są rozłączne.

Jak już stwierdziliśmy, można udowodnić, że rodzina zbiorów, na których miara wewnętrzna i zewnętrzna mają tę samą wartość, jest ciałem, a wspólna wartość miar wewnętrznej i zewnętrznej definiuje na tej rodzinie miarę. Rodzina ta zawiera wszystkie przedziały (odcinki) prostej. Z przykładu 1 wynika, że rodzina ta jest bogatsza od najmniejszego ciała zbiorów zawierającego przedziały. Istotnie, zbioru A z przykładu 1 ani $R^1 \setminus A$ nie można otrzymać przez skończoną ilość operacji dodawania, mnożenia i uzupełniania przedziałów. Przykład 2 pokazuje też, że istnieją stosunkowo proste zbiory nie należące do tej rodziny.

Okazuje się, że tak skonstruowana teoria miary jest dla celów praktycznych nie wystarczająca. „Czujemy" bowiem, że zbiór liczb wymiernych na odcinku [0, 1] powinien być mierzalny i mieć miarę 0. Tymczasem przykład 2 pokazuje, że miara wewnętrzna jego jest równa 0, a zewnętrzna 1. Odpowiednie wzmocnienie teorii uzyskujemy przez zastąpienie warunku skończoności rodzin przedziałów pokrywających dany zbiór warunkiem ich przeliczalności. Zatem zamiast (0) piszemy warunek

$$(0')\ \text{Jeżeli } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \text{ oraz } B_i \cap B_j \underset{i \neq j}{=} \emptyset, \text{ to } \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \mu(B_1) + \mu(B_2) + \mu(B_3) + \ldots$$

Zmieniamy ponadto w oczywisty sposób warunek (1).

Nie będziemy tu szczegółowo dyskutować zagadnienia obliczania sum nieskończonych $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, skorzystamy tylko ze wzoru na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots = \frac{a_1}{1-q}, \text{ jeżeli } |q| < 1.$$

Wykażemy mianowicie, że przy nowym (przeliczalnie addytywnym, jak się mówi) rozumieniu miary i miar wewnętrznej i zewnętrznej zbiór A liczb wymiernych z przedziału [0, 1] jest mierzalny i jego miara jest równa zero.

Obliczmy miarę zewnętrzną zbioru A. Obierzmy w tym celu dowolną liczbę dodatnią ε. Dla liczby wymiernej $r \in [0, 1]$ danej przez ułamek nieskracalny $\frac{m}{n}$ niech K_r będzie przedziałem $\left(r - \frac{\varepsilon}{2^{mn}}, r + \frac{\varepsilon}{2^{mn}}\right)$. Suma takich przedziałów pokrywa zbiór A.

Zatem $\mu_z(A) \leqslant \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^{mn}} = 2\varepsilon \sum_{m,u}^{\infty} \frac{1}{2^{mn}}$.

Sumę nieskończoną $S = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{mn}}$ możemy łatwo obliczyć:

$$\begin{array}{ll}
m = 1 \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots & = 1 \\
m = 2 \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots & = \frac{1}{2} \\
m = 3 \quad \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots & = \frac{1}{4} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
\hline
\text{razem } S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = & 2
\end{array}$$

(choć nie przedyskutowaliśmy w sposób należyty kwestii możliwości dowolnego przestawiania wyrazów naszego szeregu nieskończonego). Widzimy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ mamy $\mu_z(A) \leqslant 2 \cdot 2\varepsilon = 4\varepsilon$, a to znaczy, że $\mu_z(A) = 0$. Ponieważ zaś miara wewnętrzna zbioru nie przewyższa jego miary zewnętrznej (i jest nieujemna), więc i $\mu_w(A) = 0$, co właśnie znaczy, że zbiór liczb wymiernych z przedziału [0, 1] jest mierzalny i ma miarę 0.