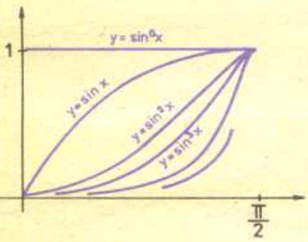
Obliczamy Π (III)

Dr Marcin E. KUCZMA



Oto jeszcze inne wzory na π:

$$\pi = \frac{10}{3} - 24\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{1}{5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9} - \dots\right)$$

(J. P. Ballantine)

$$\pi = 3{,}15 - 360\left(\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} - \frac{1}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10} + \dots\right)$$

(J. P. Ballantine)

$$\frac{17\cdot\pi^4}{360} = 1 + \left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{3}\right)^2 + \dots$$

(H. F. Sandham)

$$\pi = 2 + \frac{(1!)^2\cdot2^2}{3!} + \frac{(2!)^2\cdot2^3}{5!} + \frac{(3!)^2\cdot2^4}{7!} + \frac{(4!)^2\cdot2^5}{9!} + \dots$$

(Jerome C. R. Li)

Opowiedzieliśmy już Czytelnikom co nieco o przedstawianiu różnych funkcji w postaci sum szeregów nieskończonych: potęgowych, trygonometrycznych. Na podobieństwo szeregów — czyli sum nieskończonych — rozważa się też nieskończone iloczyny, określane jako wartości graniczne iloczynów częściowych czyli „coraz dłuższych" iloczynów skończonych.

Wiemy, że wielomian stopnia n mający n pierwiastków można przedstawić jako iloczyn czynników liniowych:

$$a(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n).$$

Niektóre funkcje nie będące wielomianami, mające nieskończenie wiele miejsc zerowych, dopuszczają podobne przedstawienie, przy czym liczba czynników jest nieskończona. Taką funkcją jest np. sinus:

$$\sin x = x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\dots \tag{1}$$

Nie każdą funkcję da się tak ładnie zapisać. Teoria iloczynów nieskończonych jest skomplikowana, a praktyczne wyznaczanie rozwinięć konkretnych funkcji — trudne.

Uwierzmy tymczasem w prawdziwość wzoru (1) i podstawmy $x = \frac{1}{2}\pi$; oto wynik:

$$1 = \frac{1}{2}\pi\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\dots,$$

czyli, po prostym przekształceniu

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\dots \tag{2}$$

Jest to wzór Wallisa (John Wallis, 1616—1703).

O ile wyprowadzenie ogólnego wzoru (1) jest trudne, o tyle wykazanie jego szczególnego przypadku — wzoru (2) — jest całkiem łatwe, jeśli się zastosuje inną metodę. Przyjrzyjmy się funkcjom: 1, $\sin x$, $\sin^2 x$, $\sin^3 x$, ... na przedziale $\left\langle 0, \frac{1}{2}\pi\right\rangle$. Oznaczmy

$$A_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx, \quad B_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{3}$$

Oczywiście

$$A_{n+1} < B_n < A_n. \tag{4}$$

Czytelnicy, znający trochę rachunek całkowy, sprawdzą z łatwością wzór rekurencyjny

$$A_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}A_n, \quad B_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}B_n, \tag{5}$$

$$A_0 = \frac{1}{2}\pi, \qquad B_0 = 1.$$

Wstawiając pierwszy z wzorów (5) do (4) i dzieląc stronami przez A_n dostajemy

$$\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{B_n}{A_n} < 1,$$

więc stosunek B_n/A_n dąży do jedności. Ale jednocześnie stosunek ten wyraża się równością

$$\frac{B_n}{A_n} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\dots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1},$$

łatwą do udowodnienia przez indukcję przy wykorzystaniu wzorów rekurencyjnych (5).

W ten sposób dochodzimy do iloczynu nieskończonego (2) i do wzoru Wallisa.

Szybkość zbieżności tego iloczynu jest — co tu kryć — niewielka. Jedyną praktyczną zaletą jest prostota rachunków; kolejne iloczyny częściowe wyznacza się korzystając z banalnej reguły — mnożenia przez właściwą liczbę parzystą i dzielenia przez odpowiednią nieparzystą. Przy operowaniu szeregami mnożenie przeplata się z dodawaniem. Obliczenie, dajmy na to, setnego przybliżenia iloczynu (2) daje błąd tego samego rzędu, co wzięcie setnej sumy częściowej szeregu $\Sigma 1/n^2$; ale nakład pracy bez porównania mniejszy.

W poprzednim odcinku pokazaliśmy metodę sumowania szeregów $\Sigma 1/n^k$, gdy k jest liczbą parzystą. Przytoczyliśmy wzory:

$$\frac{1}{6}\pi^2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots,$$

$$\frac{1}{90}\pi^4 = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots, \tag{6}$$

$$\frac{1}{945}\pi^6 = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \dots.$$

Leonhardowi Eulerowi zawdzięczamy niezwykle interesujące spostrzeżenie, że suma szeregu takiej postaci jest jednocześnie wartością pewnego iloczynu nieskończonego:

$$(7) \qquad 1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2^k}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^k}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5^k}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7^k}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{11^k}}\cdot\ldots$$

Cóż to za liczby: 2, 3, 5, 7, 11, ..., które pojawiają się w poszczególnych czynnikach tego iloczynu? Odpowiedź dość nieoczekiwana, ale widoczna: są to kolejne liczby pierwsze. Stąd wielkie znaczenie wzoru (7) w teorii liczb. Lewa jego strona to słynna funkcja „dzeta" Riemanna. W połączeniu z wzorami (6) uzyskujemy teraz nowe wzory na wymierne przybliżenie π^2, π^4, π^6. Ponieważ ciąg liczb pierwszych szybciej dąży do nieskończoności, niż ciąg wszystkich liczb naturalnych, więc iloczyn po prawej stronie wzoru (7) jest szybciej zbieżny, niż szereg po lewej stronie tegoż wzoru. Tyle, że nie znamy wzoru (efektywnego!) na n-tą liczbę pierwszą.
Czytelnikom, którzy chcieliby pójść śladami wielkiego Eulera i odtworzyć dowód tożsamości (7) (zachodzącej dla wszystkich wartości $k > 1$, niekoniecznie naturalnych),
zdradzimy, że nie jest to wcale trudne; trzeba tylko każdy z czynników po prawej stronie zapisać jako sumę odpowiedniego szeregu geometrycznego:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^k}}=1+\frac{1}{p^k}+\frac{1}{p^{2k}}+\frac{1}{p^{3k}}+\ldots$$

Dalszy ciąg rozumowania, wzorem matematyków starogreckich, skwitujemy słówkiem:
Patrz! Oczywiście, co kto zobaczy, zależy od tego, jaki ma wzrok... Euler dojrzał lewą stronę wzoru (7).
A teraz porzućmy ten temat i przypomnijmy sobie rozwinięcie funkcji arcus tangens w szereg potęgowy:

$$(8) \qquad \operatorname{arctg} x = x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\ldots, \quad |x| \leqslant 1.$$

Od wyprowadzenia tego wzoru rozpoczęliśmy nasze rozważania analityczne przed dwoma miesiącami. Podstawienie $x = 1$ dało nam szereg Leibniza, zbieżny bardzo powoli do sumy $\frac{1}{4}\pi$. Skąd ta „opieszałość"? Składnikami szeregu (8) są funkcje potęgowe; jedynka jest w ogóle nieczuła na potęgowanie. Punkt $x = 1$ jest końcowym punktem przedziału $-1 \leqslant x \leqslant 1$, czyli przedziału tych wartości x, dla których szereg (8) jest zbieżny. Jasne jest, że zbieżność będzie tym szybsza, im bliżej zera wybierzemy punkt x.
Ale wartości funkcji $\operatorname{arctg} x$ dla x wymiernych, $|x| < 1$, nie wyrażają się wymiernie przez π.
Z kłopotem tym można sobie poradzić w bardzo prosty i sprytny sposób. Niech $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$; zatem $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$, skąd

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}=1.$$

Oczywiście $0 < \alpha+\beta < \frac{1}{2}\pi$, a jedyną liczbą w tym przedziale, której tangens równa się 1, jest liczba $\frac{1}{4}\pi$. Otrzymaliśmy więc równość $\alpha+\beta = \frac{1}{4}\pi$, czyli

$$(9) \qquad \frac{1}{4}\pi = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$$

Podstawiając we wzorze (8) $x = \frac{1}{2}$ oraz $x = \frac{1}{3}$ dostajemy szeregi zbieżne bardzo szybko (wykładniczo). Sumy częściowe tych szeregów dodane do siebie dadzą, z uwagi na równość (9), dobre przybliżenie liczby $\frac{1}{4}\pi$.
Tę metodę można jeszcze usprawnić. Zachodzi na przykład równość

$$\frac{1}{4}\pi = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

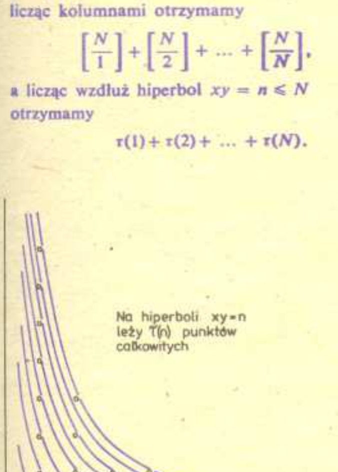
Wyprowadza się ją zupełnie tak samo, jak poprzednią. Autorem tego pomysłu jest matematyk angielski J. Machin (1685—1751).

Rozwiązanie zadania M 232.
Obliczmy na dwa sposoby liczbę punktów mających obie współrzędne naturalne i leżących na hiperboli $xy = N$ i pod nią: licząc kolumnami otrzymamy

$$\left[\frac{N}{1}\right]+\left[\frac{N}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{N}{N}\right],$$

a licząc wzdłuż hiperbol $xy = n \leqslant N$ otrzymamy

$$\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(N).$$



W latach 1944—48 Morris Fergusson, Archibald i Wrench obliczyli 808 cyfr rozwinięcia dziesiętnego π, wykorzystując wzór

$$\frac{1}{4} = 3\,\mathrm{arctg}\frac{1}{4} + \mathrm{arctg}\frac{1}{20} + \mathrm{arctg}\frac{1}{1985}$$

i sprawdzając obliczenia za pomocą zależności

$$\frac{1}{4} = 3\,\mathrm{arctg}\frac{1}{4} + \mathrm{arctg}\frac{5}{99}$$

odkryli, że Shanks, który w XIX wieku obliczył ponad 700 cyfr π, pomylił się na 527 miejscu, wskutek opuszczenia składnika $1/29 \cdot 5^{29}$.

100000 znaków, o których była mowa w pierwszym artykule można znaleźć w pracy: Daniel Shanks and John W. Wrench Jr., *Calculation of π to 100.000 Decimals*, w *Mathematics of Computation* 16(1962), str. 76–99

3 1 4 1 5 9 2 6
Kto z woli i myśli zapragnie pi spisać
5 3 5
cyfry, ten zdoła...

3 1 4 1 5 9 2 6
Que j'aime à faire apprendre un nombre
5 3 5
utile aux sages!
Immortel Archimède, artiste ingénieux,
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.

Jeśli wartość $x = \frac{1}{5}$ podstawimy do wzoru (8), a następnie zsumujemy n początkowych składników otrzymanego szeregu, otrzymamy liczbę $\mathrm{arctg}\frac{1}{5}$ z błędem mniejszym niż $1/(2n+1) \cdot 5^{2n+1}$ (dlaczego?). Podobnie dla $x = \frac{1}{239}$, suma m składników daje błąd mniejszy niż $1/(2m+1) \cdot 239^{2m+1}$. Mnożąc pierwszy z tych błędów przez 4 i dodając drugi, oszacujemy błąd przybliżenia liczby $\frac{1}{4}\pi$. Mnożąc jeszcze raz przez 4 ocenimy błąd przybliżenia π.

Celowe jest tu dobranie takich wartości n i m, aby błąd dla $4\,\mathrm{arctg}\frac{1}{5}$ był tego samego rzędu, co błąd dla $\mathrm{arctg}\frac{1}{239}$ (w przeciwnym razie obliczanie niektórych składników jest robotą daremną). Weźmy np. $n = 18$, $m = 5$. Krótki rachunek przekonuje nas, że wówczas pierwszy z tych błędów szacuje się przez $1{,}5 \cdot 10^{-27}$, a drugi przez $0{,}7 \cdot 10^{-27}$; łączny błąd przybliżenia liczby π otrzymanego w ten sposób nie przekracza 10^{-26}. Znaczy to, że dostajemy 25 dokładnych cyfr po przecinku!

Wykonanie wszystkich potrzebnych tu obliczeń z potrzebną dokładnością zajęło piszącemu te słowa — przy użyciu ręcznego kalkulatorka (ośmiocyfrowego) — niecałą godzinę.

Popularny wierszyk „Kuć i orać..." (pierwsza część artykułu, Delta 6/1980) daje receptę na zapamiętanie 23 cyfr po przecinku. Wskazaliśmy metodę wyznaczania dalszych...

Czytelnik ma prawo poczuć się wyprowadzony w pole. Więc po to wypracowaliśmy tak różnorodne techniki, aby w końcu okazało się, że z przedstawionych metod najskuteczniejsza polega na całkiem elementarnym wykorzystaniu wzoru (8), wyprowadzonego dwa miesiące temu, na samym początku naszego cyklu!

Drogi Czytelniku — nie miej tego za złe. Wzory Leibniza, Eulera, Wallisa są dla obliczenia π mniej efektywne, niż wzór Machina. Ale prócz wartości użytkowej istnieje jeszcze wartość poznawcza. Czyż to nie fascynujące, że jedna i ta sama liczba π wykazuje tak przedziwne i różnorodne związki z arytmetyką, że można ją otrzymać jako sumy różnych szeregów, granice różnych ciągów?

Wszystkie otrzymane wzory na π były wnioskami z równości ogólniejszych, dla funkcji. Analiza matematyczna jest ciekawa! Powiedzmy sobie szczerze: z całych naszych przeprowadzonych rozważań najbardziej interesujące jest to, że różne znane funkcje można przedstawiać w nieoczekiwanych postaciach: sum szeregów potęgowych, trygonometrycznych, iloczynów funkcji liniowych... Te przedstawienia („rozwinięcia") są o wiele ważniejsze, niż samo wyznaczanie kolejnych cyfr ludolfiny. Bo czymże jest obliczanie π? Miłą rozrywką, igraszką tylko, niczym więcej.

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 232. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej N zachodzi równość

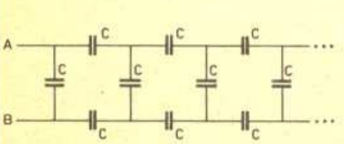
$$\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(N) = \left[\frac{N}{1}\right] + \left[\frac{N}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{N}{N}\right]$$

($\tau(n)$ — liczba dzielników n, $[x]$ — część całkowita x).
Rozwiązanie na str. 9

M 233. Czy istnieje sześciokąt S mający tę własność, że każdą parę jego boków widać z pewnego punktu wewnętrznego, ale nie istnieje punkt, z którego byłoby widać wszystkie sześć boków?
Rozwiązanie na str. 2

M 234. Wykazać, że pierwiastki kwadratowe trzech różnych liczb pierwszych nie mogą być wyrazami postępu geometrycznego.
Rozwiązanie na str. 4

Redaguje doc. dr Michał ŚWIĘCKI



F 79. Oblicz pojemność wypadkową C_{AB} narysowanego obok nieskończonego układu kondensatorów.
Rozwiązanie na str. 3

(A. Jurewicz)