Zgadnij największą!

Danuta i Władysław
MAJEWSCY

— Zagrajmy w odgadywanie liczb — zaproponował Marek.
— To znaczy pomyślisz jakąś liczbę, a ja mam odgadnąć? — zaciekawił się Darek.
— Niezupełnie tak. Pomyślę sobie nie jedną liczbę, lecz cały ciąg i każdą z tych liczb zapiszę na oddzielnej kartce. Potem kartki potasuję i będę je kolejno odkrywał. Ty, gdy uznasz, że pokazana liczba jest największą spośród wypisanych przeze mnie, przerywasz grę. Trafiłeś — wygrałeś; nie — wygrałem ja. Jasne?
— Jasne, ale nasze szanse nie są równe.
— Masz rację i dlatego proponuję; ty za wygraną otrzymasz np. 5 pkt, a gdy ja wygram, wzbogacę się o 1 punkt. Zgoda?
— Zgoda — odparł Darek i po namyśle dodał — sądzę, że wystarczą mi trzy punkty.
— No to zaczynamy — Marek wziął się szybko za zapisywanie liczb, jakby bojąc się, że Darek zmieni zdanie.
Czy Darek, ustalając punktację, nie przecenił swych szans? Przecież w wypadku, gdy Marek zapisze bardzo dużo liczb, odgadnięcie największej wydaje się bardzo trudne. Zanim zaczniesz czytać następny akapit pomyśl: w jaki sposób zamierza Darek odgadywać, a więc jaką zamierza przyjąć strategię i na jaki procent poprawnych odpowiedzi może liczyć stosując ją? Zakładamy, że gra trwa długo i że przed każdą partią Marek podaje Darkowi, ile liczb tym razem napisał, powiedzmy n.

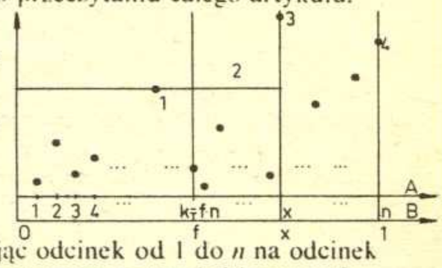
\+ + +

Darek postępuje tak: przegląda k początkowych liczb bez przerywania gry i zapamiętuje największą spośród nich. Następnie widząc pierwszą liczbę większą od zapamiętanej uznaje ją za największą. Oczywiście, jeśli wśród pozostałych (n-k) liczb nie znajdzie się większa — Darek nie wybiera żadnej i przegrywa „walkowerem". Jakie jednak powinien wybrać k?

\+ + +

Jakie jest prawdopodobieństwo, że dla danych k i n Darek poprawnie wskaże największą liczbę oraz dla jakiego k prawdopodobieństwo to jest największe? Przy obliczaniu posłużymy się techniką często stosowaną w matematyce: zastąpimy zadanie sformułowane dla skończonego ciągu liczb całkowitych analogicznym zadaniem dla odcinka [0, 1]. Pozwoli to zmienić sumy na całki i znacznie uprości rachunki. Wynik uzyskany w ten sposób jest dobrym przybliżeniem nawet dla niezbyt dużych n. Jak duże musi być n, aby błąd nie przekroczył np. 1%? Zastanów się nad tym po przeczytaniu całego artykułu.

Przedstawmy graficznie możliwy ciąg n liczb:
1 — największa spośród liczb początkowych
2 — w tym przedziale nie ma większych liczb
3 — największa liczba
4 — druga co do wielkości liczba



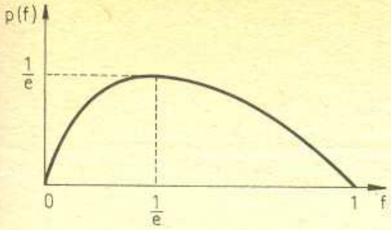
a następnie przeskalujmy oś OX przekształcając odcinek od 1 do n na odcinek [0,1] — wariant B na rysunku. Oznaczyliśmy przy tym stosunek k/n przez f, a położenie największej liczby przez x. Widzimy, że przyjęta strategia przyniesie powodzenie, gdy ciąg ma następujące własności:
1° Największa liczba znajduje się w przedziale $(f, 1)$ — tj. wśród końcowych (n-k) liczb

oraz 2° Druga co do wielkości liczba jest w przedziale $(0, f)$.
Prawdopodobieństwo tego zdarzenia $= f$
lub Druga liczba jest w $(x, 1)$, a trzecia w $(0, f)$.
Prawdopodobieństwo $= f \cdot (1-x)$
lub Druga i trzecia jest w $(x, 1)$, a czwarta w $(0, f)$.
Prawdopodobieństwo $= f \cdot (1-x)^2$
lub Druga, trzecia i czwarta w $(x, 1)$, piąta w $(0, f)$.
Prawdopodobieństwo $= f \cdot (1-x)^3$ itd.

Prawdopodobieństwo spełnienia któregoś z wariantów warunku 2 jest równe:

$$f \cdot (1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \ldots) = f/x.$$

Szereg w nawiasie jest znany ze szkolnego programu matematyki w postaci $a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots = 1/(1-a)$.



Prawdopodobieństwo sukcesu, a więc trafnego odgadnięcia, jest równe całce po wartościach x spełniających warunek 1° z prawdopodobieństwa spełnienia warunku 2°. Jest to uogólnienie wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe na przypadek, gdy zmienia się ono w sposób ciągły w obszarze argumentów spełniających warunek:

$$p(f) = \int_f^1 (f/x)\,dx = f\cdot(\ln 1 - \ln f) = f\cdot \ln(1/f)$$

Wykres $p(f)$ przedstawia rysunek obok.
Prawdopodobieństwo na maksimum dla $f = 1/e \approx 0{,}37$, co można wykazać obliczając pochodną i przyrównując ją do zera:

$$p'(f) = \ln(1/f) - 1$$

$$p'(f) = 0 \rightarrow 1/f = e \quad \text{czyli} \quad f = 1/e$$

\+ + +

Teraz jest już jasne: Darek może zadowalać się stawkami 3 : 1 na swoją korzyść. Jeżeli wskazując największą liczbę prawidłowo otrzymuje on Z punktów (w naszym przypadku $Z = 3$), a przy porażce przegrywa jeden punkt, to oczekiwany wynik każdej gry jest równy:

$$(1/e)\cdot Z - (1 - 1/e)\cdot 1$$

A więc jeżeli $Z > (e-1) \approx 1{,}72$, to przy długotrwałej grze Darek ma pewność wygranej.

\+ + +

Jeżeli proponowana gra spodobała Ci się, to postaraj się zastanowić, czy proponowana strategia jest na pewno najlepsza?
Ile wynosi prawdopodobieństwo sukcesu dla $n = 2, 3, 4, 5, 10$?
Jak zmieni się optymalna strategia i prawdopodobieństwo wygranej, gdyby:
a. Marek mógł układać liczby według swego uznania zamiast je tasować?
b. Darek nie znał każdorazowo liczby n, a jedynie wiedział, że jest ona większa od n_1 i mniejsza od n_2?
c. Darek nie musiał dać odpowiedzi, tj. w sytuacji, gdy nie wskaże on żadnej liczby — uznawano remis?
d. zastosować modyfikacje **a**, **b**, **c** jednocześnie wszystkie lub parami.
Prześlijcie nam wyniki swych przemyśleń. Odpowiedzi na niektóre pytania my też nie znamy.

W jednej ze szkół warszawskich miała miejsce straszliwa awantura. Rodzice zarzucali nauczycielce, że przekazuje dzieciom nieprawdziwe wiadomości. Meritum sprawy można było streścić tak: czy równoległobok jest trapezem? Ze zdumieniem dowiedzieliśmy się, że nie jest! (Karol Szymański, Edward Zegadło, Matematyka 5). Oto stosowne określenie (str. 135) *Czworokąt wypukły, który ma dokładnie jedną parę boków równoległych, nazywamy trapezem.* Można i tak. Ostatecznie to jest kwestia definicji. Ale — konsekwentnie — kwadrat nie powinien być prostokątem (a na stronie 144 autorzy twierdzą, że jest), liczba 2 nie powinna być wymierna (bo jest przecież całkowita ...), a koń nie powinien być zwierzęciem.

Stan naszego konta w rozliczeniach ze światem wyraża się prostym ułamkiem, którego licznik opisuje to, co mamy, a mianownik — to, co chcemy mieć. Możemy albo zwiększać licznik (co czyni Zachód), albo zmniejszać mianownik (co zawsze zalecała filozofia Wschodu).

(Dean Inge, „*Mathematical Student*" 1934)

Kącik Czytelniczy

Kulej geometrii

— Ech, WNUku zatracony — powiedział Bańdzioch zbliżając się groźnie do Kostii Rudenko. — Na co to się porywa ... Z powszechnej do gimnazjum się zachciało! Nawet srebrnych guzików nie macie ani mundurków ... A pchacie się, gdzie nie trzeba ...
— Wy — to szkoła średnia, a my szkoła wyższa, mimo że powszechna — powiedział chytrze Kostia Żuk. — A uczyliśmy się więcej od was ... Powiedz mi na przykład, gdzie mamy połowę sumy podstaw?
Bańdzioch jeszcze nigdy w życiu nie zetknął się z „połową sumy podstaw".
— Kicham na twoje połowy sumy podstaw — wściekał się Bańdzioch. — Przyłożę ci zaraz pieczątkę na facjacie, to będziesz wiedział ...

(Lew Kassil, *Szwambrania*)

Zastosowania geometrii

— To znaczy wszedłeś także pod kołdrę?
— Pod kołdrę — powtórzył — z parą zimnych, nagich ramion wokół szyi i z dygocącym, wstrząsanym szlochami ciałem, przytulonym do mego ciała.
Rivers popił trochę whisky i przechylony na oparcie fotela długo palił w milczeniu.
— Prawda — odezwał się wreszcie. Cała prawda i nic tylko prawda. Wszyscy świadkowie składają tę samą przysięgę i zeznają o tych samych wydarzeniach. Rezultatem jest oczywiście pięćdziesiąt siedem odmian fikcji. Która z nich jest najbliższa prawdy? Stendhal czy Meredith? Anatol France czy D. H. Lawrence? Źródła najgłębszego życia niechaj się złączą w złocistej czystości namiętnego uczucia czy też reakcje płciowe samicy ludzkiej?
— Znasz odpowiedź? — zapytałem.
Potrząsnął głową.
— Może geometria mogłaby tu coś wyjaśnić. Przedstawić fakt na zasadzie trzech współrzędnych. — Cybuchem fajki Rivers wykreślił w powietrzu dwie linie, zbiegające się pod kątem prostym, a z punktu ich przecięcia poprowadził trzecią, ciągnąc ją aż ponad głowę.

(Aldous Huxley, *Geniusz i bogini*)