

Nowa Keplera

Od najdawniejszych czasów niebo było dla ludzi uosobieniem spokoju i stabilności — w przeciwieństwie do wiecznie niespokojnej Ziemi i wydarzeń na niej zachodzących. Dlatego wszelkie zaburzenia tego spokoju budziły powszechny strach i wróżyły, jak wierzono, rozmaite katastrofy. Do takich zjawisk należały rozbłyski nowej gwiazdy w miejscu, gdzie przedtem żadnego obiektu nie było widać. Stąd pochodzi nazwa: gwiazdy nowe.

Z biegiem czasu astronomowie doszli do wniosku, że gwiazdy nowe nie stanowią jednolitej grupy. Stwierdzono, że istnieje jeden typ gwiazd wybuchowych, którym pozostawiono nazwę „nowe” i drugi — gwiazd supernowych, wybuchających ze znacznie większą mocą. Gwiazdy nowe są układami podwójnymi. Wybuch polega na odrzuceniu cienkiej powierzchniowej warstwy przez gwiazdę, która nieustannie pobiera materię od swojej towarzyszk. Wybuchy takie powtarzają się co kilkaset lub kilka tysięcy lat i za każdym razem wydzielana jest energia rzędu 10^{39} J. Natomiast wybuch supernowej polega na eksplozji gwiazdy znajdującej się w tak zaawansowanym stadium ewolucji, że w jej wnętrzu doszło już do wyprodukowania dużych ilości pierwiastków cięższych od wodoru. Jest to wydarzenie jednorazowe w życiu gwiazdy i prowadzi do jej zniszczenia, a co najmniej silnej przebudowy. Ilość wydzielonej przy tym energii może zawierać się w granicach 10^{41} — 10^{45} J. Zważywszy, że Słońce promieniuje z mocą prawie 4×10^{26} W, widzimy, że energia wybuchu jednej supernowej mogłaby zapewnić Słońcu świecenie przez wiele miliardów lat. Supernowe w maksimum blasku świecą jak cała ich macierzysta galaktyka. Wybuchy supernowych są pilnie śledzone przez astronomów, gdyż ich obserwacje mogą dostarczyć argumentów za lub przeciw aktualnym teoriom budowy i ewolucji gwiazd. Niestety, zachodzą one dość rzadko — średnio co kilkaset lat w jednej galaktyce (także i w naszej). Johannes Kepler był jednym z tych, którym dane było na własne oczy widzieć supernową. W październiku 1604 r. pojawiła się w gwiazdozbiornie Wężownika (*Ophiuchus*) jasna gwiazda, która świeciła przez kilka tygodni jaśniej niż Jowisz. Nazwana została Nową Keplera, ale w istocie była supernową (w naszej Galaktyce), czego sam Kepler wiedzieć nie mógł. W ogóle nie istniało wówczas jeszcze ani pojęcie galaktyki, ani supernowej.

Z pozostawionych przez niego (i innych obserwatorów) zapisków (głównie chodzi tu o charakter spadku jasności gwiazdy) domyślamy się obecnie, że najprawdopodobniej była to tzw. supernowa typu I (z tych najsłabszych) — gwiazda niewiele masywniejsza od Słońca, której wybuch nastąpił wskutek zapadnięcia się jej jądra. Z jądra tego powstaje zwykle gwiazda neutronowa, wyzwolona zaś przy tym energia grawitacyjna powoduje rozproszenie zewnętrznych warstw gwiazdy stanowiących pokaźny ułamek jej masy. W 1941 r. W. Baade przy pomocy 2,5-metrowego teleskopu obserwatorium na Mount Wilson w Kalifornii wykrył w domniemanym miejscu eksplozji bardzo słabą mgławicę, która jak się później okazało jest źródłem promieniowania radiowego. Promieniowanie takie jest charakterystyczną cechą pozostałości po supernowych.

Kepler miał wyjątkową okazję oglądać to imponujące zjawisko, jakim jest wybuch supernowej. Od jego czasów do dziś tylko dwie supernowe można było dostrzec gołym okiem (jedna była na granicy możliwości ludzkiego oka): w latach 1843 i 1885. Obecnie obserwuje się kilkadziesiąt supernowych rocznie, ale w innych galaktykach i oczywiście na zdjęciach fotograficznych. Astronomowie bardzo by chcieli, żeby i w naszej Galaktyce znów pojawiła się supernowa... byle nie za blisko.

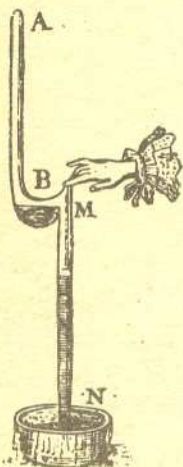
Tomaz KWAST

Horror vacui

W XVII wieku przybrał na sile, ciągnący się od czasów Arystotelesa, spór o istnienie próżni. Perypatetycy, zwolennicy idei Arystotelesa, uważali, że działanie syfonów, baniek lekarskich czy pipetek oparte jest na prostej zasadzie — „*natura nie znosi próżni*” (horror vacui). Jednakże zgodnie z doświadczeniem XVII-wiecznych hydraulików maksymalna głębokość, z której można wypompować wodę nie przekracza 18 łokci. Galileusz sądził, że te 18 łokci wody określa w istocie siła z jaką „*natura przeciwstawia się tworzeniu próżni*”. Okazało się jednak, kiedy Torricelli zastąpił wodę 14-krotnie krótszym słupkiem rtęci, że siła ta zmienia się w zależności od... pogody. Obserwując te zmiany Torricelli doszedł do wniosku, że ich przyczyną jest zmieniające się ciśnienie powietrza.

„*Do tej pory wydawało nam się, że siła, która przeciwstawia się naturalnej tendencji żywego srebra żeby spaść w dół, spowodowana jest działaniem naczynia albo próżnią albo jakąś bardzo rozrzedzoną substancją. Ja sądzę jednak, że siła ta pochodzi z zewnątrz. Na powierzchnię cieczy w naczyniu ciśnie przecież ciężar pięćdziesięciu mil powietrza*”.

Argumentem decydującym o przyjęciu tej hipotezy przez cały świat naukowy były wyniki doświadczenia Pascala. Różnica wysokości słupka rtęci u podnóża góry Pin-de-Dôme i na jej wierzchołku (1200 metrów) wynosiła 15 kresek (paryski cal równy 2,7 cm dzieli się na 12 kresek). Żeby na podstawie wysokości słupka rtęci móc wyznaczyć różnicę wzniesień, wystarczyło teraz znaleźć zależność ciśnienia od wysokości. Po raz pierwszy zrobił to Mariotte w 1676 roku.





Rozwiązanie zadania M 268. Ustawmy nasze liczby w porządku nie malejącym: $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_{32}$. Przypuśćmy, że nie można z nich wybrać trzech wyrażających długości boków pewnego trójkąta. W takim razie zawsze $k_n \geq k_{n-1} + k_{n-2}$. Oznaczmy przez F_1, F_2, F_3, \dots kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego, tj. $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = F_1 + F_2 = 2$ i ogólnie dla $n > 2$: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Ponieważ $k_1 \geq 1$ i $k_2 \geq 1$ oraz $k_n \geq k_{n-1} + k_{n-2}$, więc (indukcja!) także $k_p \geq F_p$ dla dowolnego p . Pozostaje skorzystać z tego, że $F_{32} > 1000000$.

Uwaga! Dokładną wartością F_{32} jest 2178309. Przytoczone powyżej oszacowanie można też uzyskać ze wzoru Bineta

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n \right)$$

Mamy: $(\sqrt{5}+1)/2 \approx 1,61803389... > 16 \cdot 10^{-1}$, $(\sqrt{5}-1)/2 \approx 0,61803389 < 1$, zatem $F_{32} > (16^{32} \cdot 10^{-32} - 1)/\sqrt{5} > -1 + 2^{128} \cdot 10^{-32} / \sqrt{5}$, przybliżoną wartość tej ostat. j. liczby można łatwo obliczyć np. za pomocą logarytmów.

Jego rozumowanie przebiegało następująco. Podzielił atmosferę na warstwy, takie że po przejściu każdej z nich ciśnienie zmieniło się o $1/12$ kreski słupka rtęci. Ponieważ na poziomie morza słupek ma 28 cali, to w sumie takich warstw będzie $28 \times 144 = 4032$. Grubości warstw są różne, a pierwsza, zgodnie z obserwacjami Mariotte'a ma 5 stóp. Grubości następnych (przy założeniu, że temperatura powietrza nie zmienia się z wysokością) ΔH_n wynikają z prawa Boyle'a-Mariotte'a (iloczyn ciśnienia i objętości przy stałej temperaturze jest stały):

$$\frac{\Delta H_2}{5} = \frac{4032}{4031}$$

$$\frac{\Delta H_3}{5} = \frac{4031}{4030} \dots$$

Wysokość, na której ciśnienie będzie o $\frac{m}{12}$ kreski mniejsze niż na poziomie morza, jest sumą grubości $m - 1$ warstw:

$$H = \Delta H_1 + \dots + \Delta H_{m-1} = 4032 \cdot 5 \left(\frac{1}{4032} + \frac{1}{4031} + \dots + \frac{1}{4032 - (m-1)} \right)$$

Mariotte nie potrafił znaleźć sumy tego szeregu i dlatego zastąpił go sumą ciągu arytmetycznego o tej samej liczbie składników i takim samym pierwszym i ostatnim wyrazie. Przybliżenie to jest barażo złe i dlatego wyniki Mariotte'a nie były zgodne z obserwacjami. Dopiero 10 lat później Halley wyprowadził dokładny wzór (proponuję Czytelnikowi powtórzyć to wprowadzenie):

$$H = \frac{(\lg 30 - \lg \alpha) 800}{0,0144765}$$

gdzie α jest wysokością słupka rtęci na wysokości H (30 cali na poziomie morza). Dzięki tym obliczeniom barometr mógł służyć do wyznaczania różnicy wzniesień.

Kartezjusz zwrócił uwagę na możliwości innego zastosowania barometru, a mianowicie do badań meteorologicznych. Już w 1647 r. wysłał do swego przyjaciela Mersenne'a pasek papieru z naniesioną skalą z prośbą o systematyczne obserwacje ciśnienia. Pascal na podstawie serii podobnych obserwacji przeprowadzonych w kilku miejscach, próbował przepowiadać pogodę. Opisane zastosowania barometrów pociągnęły za sobą próby ich udoskonalenia a nawet projekty zupełnej zmiany konstrukcji. W 1697 r. Leibniz zaproponował na przykład zbudowanie barometru, którego główną częścią byłaby metalowa puszką, z której wypompowano powietrze.

Projekt ten, zrealizowany dopiero 150 lat później, był już bardzo bliski używanym obecnie aneroidom.



Rozwiązanie zadania F 98.

Małe tarcie w cieczech upoważnia do twierdzenia, że pręt pływający będzie w położeniu równowagi trwałej. Położeniu temu odpowiada minimum energii potencjalnej, w danym przypadku — energii potencjalnej sił ciężkości pręta i wypartej cieczy. Zmiany energii potencjalnej pręta są w obu przypadkach jednakowe, można jej zatem nie uwzględniać. Pozostają zmiany energii wypieranej cieczy i łatwo je obliczyć ze zmian położenia środka masy. (Środek masy trójkąta znajduje się w $2/3$ środkowej od odpowiedniego wierzchołka). Skalując energie tak, by w stanach początkowych były one zerowe, odpowiednie wartości energii układów wynoszą:

$$E_{uA} = \Delta E_{uA} = \frac{V}{2} \rho g \frac{a}{4} = 0,25 \frac{V}{2} \rho g a$$

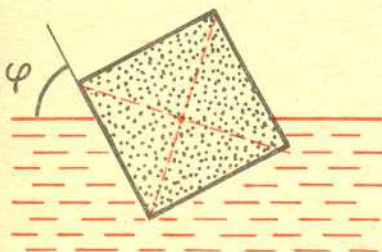
V — objętość pręta

a — długość krawędzi

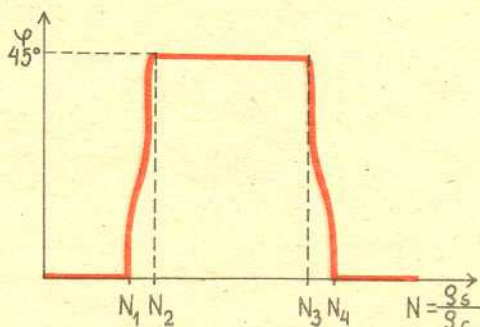
$$E_{uB} = \Delta E_{uB} = \frac{V}{2} \rho g \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{2}}{2} \approx 0,24 \frac{V}{2} \rho g a$$

ρ — gęstość cieczy

$E_{uB} < E_{uA}$, czyli pręt powinien pływać w położeniu przedstawionym na rysunku B. Pozostaje problem, czy nie istnieją inne położenia równowagi, dla których energia potencjalna mogłaby być jeszcze mniejsza? Odpowiednie rachunki wykazują, że dla długiego pręta położenie B jest faktycznie położeniem równowagi trwałej, natomiast przy długościach porównywalnych z długością krawędzi podstawy może pojawić się inne (i to bynajmniej nie jedno!). Ciekawy jest też ogólniejszy przypadek: pływanie długiego pręta w cieczy o dowolnej gęstości. Jeżeli N oznacza stosunek gęstości pręta i cieczy, a φ — kąt jaki tworzy ściana boczna prostopadłością z powierzchnią cieczy, wtedy wykres $\varphi(N)$ przedstawia rys. 2. Zachęcamy Czytelników, aby eksperymentalnie zweryfikowali fakty, które podaliśmy „na wiarę”. Życzymy powodzenia!



Rys. 1



Rys. 2

$$N_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0,21$$

$$N_2 = \frac{9}{32} \approx 0,28$$

$$N_3 = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0,79$$

$$N_4 = \frac{23}{32} \approx 0,72$$