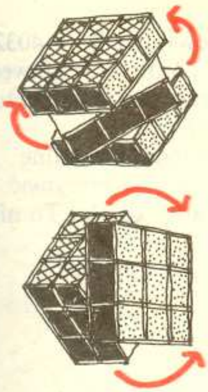
Poradnik dla cierpiących na *Cubitis magikia*

Autorzy artykułu są uczniami III klasy XIV Liceum imienia Klementa Gottwalda w Warszawie. W otrzymanym tekście poczyniliśmy, za wiedzą autorów, znaczne skróty.

Andrzej PILITOWSKI, Tomasz WEPPO



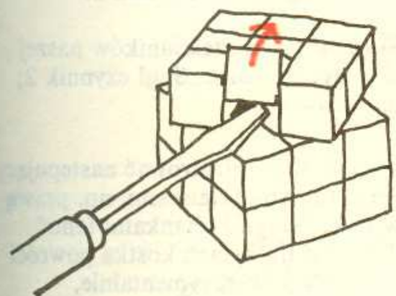
Rys. 1. Kostka Rubika.

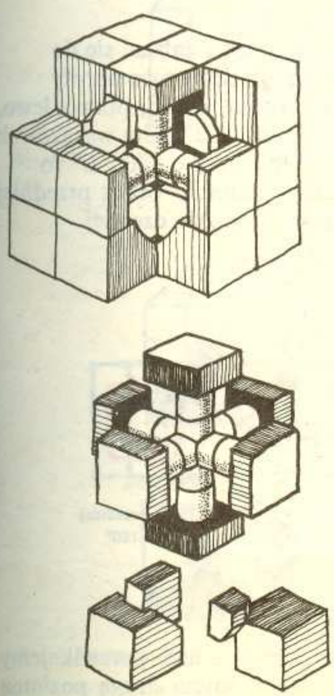
Kilka lat temu przywleczono z Węgier do Stanów Zjednoczonych wysoce zaraźliwą chorobę. Z szybkością epidemii opanowała ona kontynent amerykański, a jej zarazki rozniesiono samolotami, statkami i samochodami po całym świecie. Choroba nie wybiera: atakuje młodych i starych, biednych i bogatych, grubych i chudych, urzędników i robotników. Nie zwraca uwagi nawet na przynależność związkową delikwenta. Oto jak ją opisuje w *Scientific American* (marzec 1981) Douglas R. Hofstadter:

Cubitis magikia, n. Poważny rozstrój umysłowy, połączony z jednoczesnym swędzeniem końców palców. Ulgę przynosi jedynie dłuższy kontakt z wielokolorową kostką pochodzenia węgierskiego i japońskiego. Objawy utrzymują się nawet przez wiele miesięcy. Wysoce zaraźliwe!

Oto kilka przypadków (wg tygodnika *Time*). Kathleen Ollerenshaw z Manchester musiała poddać się operacji ścięgna kciuka po zbyt długim wieczorze z kostką. Pewna Niemka podarowała kostkę swemu mężowi i po kilku miesiącach wystąpiła o rozwód, gdyż mąż przestał odzywać się do niej i do gości, a wieczorami był tak wyczerpany kręceniem sześcianikami, że na przytulenie żony nie miał już siły ani ochoty.

Zarazek wywołujący tak przedziwne dolegliwości ma kształt sześcianu, podzielonego na mniejsze, zwykle centymetrowe sześcianiki i pokolorowane na 6 jaskrawych kolorów tak, że każda ściana jest innego, jednolitego koloru. W tej fazie zarazek jest jeszcze niegroźny. Cała kostka jest jednak tak skonstruowana, że każda z jej warstewek może obracać się względem pozostałych (rys. 1). Przemyślne rozwiązanie techniczne widzimy obok.





Rys. 2. Wewnętrzny mechanizm kostki.

Obróćmy kilka razy warstwami sześcianików tak, żeby nie pamiętać, jak to robiliśmy (to ostatnie jest zresztą bardzo łatwe). I oto zadanie, o które chodzi w całej tej zabawie:

Wrócić do położenia wyjściowego

Na podstawie takiego opisu chyba każdy zlekceważy i zadanie i niebezpieczeństwo wpadnięcia w groźny nałóg. Przyznaje to dziś wielu nieszczęśliwych. Czytelnika, który ma możliwości uniknięcia kontaktu z kostką, prosimy

UWAŻAJ! NIE BIERZ TEGO NIGDY DO RĘKI!

Pozostałym chcemy choć trochę ulżyć w ich cierpieniach i podamy sposób układania kostki.

Idea magicznej kostki znana była już przed wojną, ale skonstruował kostkę dopiero **Ernö Rubik** w 1975 roku. W rok później niezależnie od Rubika skonstruował ją i opatentował w Japonii Terutoshi Ishige. Dlatego niektórzy, bardzo nieliczni zresztą, używają nazwy: kostka węgiersko-japońska. Początkowo dość droga (około 20 dolarów) staniała obecnie w USA do przyzwoitej ceny 5—6 dolarów i będzie z pewnością jeszcze tanieć. Z samej budowy kostki wynika kilka wniosków:

1) środki ścian będące po przeciwnych stronach kostki nigdy nie będą środkami sąsiednich ścian,

2) konfiguracja środków ścian jest niezmienna — tzn. jeśli umówimy się że np. środek biały ma leżeć na górze, niebieski na dole, żółty z prawej itd. — to nie zmieni się to w trakcie całej zabawy,

3) kolor ściany jest taki sam, jak kolor jej środkowego klocka (uwaga banalna, ale ważna, bo wynika z niej, że przyszłe ułożenie każdego klocka jest już wiadome od początku),

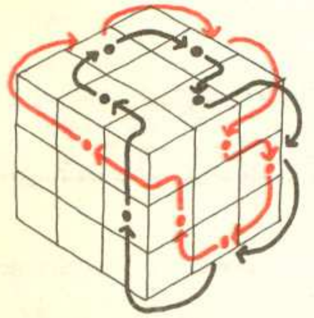
4) obroty środkowych plasterków kostki nie zmieniają położeń klocków narożnych. Łatwo ustawić 3, 4, 5 czy 6 jednobarwnych klocków na jednej ścianie. Od razu widzimy, na czym polega podstawowa trudność w naszej zabawie:

Jak wstawić kolejny klocek na swoje miejsce (określone, jak widzieliśmy, od samego początku) **nie zmieniając położeń klocków już dobrze ustawionych.**

Warto może zdać sobie sprawę z algebraicznego podkładu zabawy.

Przekształcenia naszej kostki tworzą grupę, każde przekształcenie jest złożeniem pewnej liczby elementarnych obrotów każdej z dziewięciu warstw. A zatem grupa przekształceń naszej kostki ma 9 generatorów: obroty warstw o 90°. Liczbę generatorów można zmniejszyć do 3: jeden obrót np. prawej ścianki i dwa obroty sztywne całej kostki. Do opisania wszystkich (pozycji) ruchów kostki wystarczyłyby więc tylko trzy symbole.

Ile jest tych pozycji? Obliczmy: 8 naroży można rozmieścić na $8! = 40320$ sposobów, każdy w jednej z trzech możliwych orientacji, 12 klocków krawędziowych w przeznaczonych na nie komórkach na $12! = 479001600$ sposobów, każdy znów zorientowany na dwa sposoby. Łącznie daje to $8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} =$ $= 519024039293878272000$ ustawień. Zrobiliśmy jednak niedopuszczalne założenie, że każdy teoretycznie możliwy układ klocków da się otrzymać z wyjściowego monokolorowego bez potrzeby ... rozbierania kostki. To nieprawda.



Rys. 3a. Wędrówka klocka krawędziowego przy kolejnym wykonywaniu przekształcenia *PG* (obrót prawej ścianki a potem górnej).

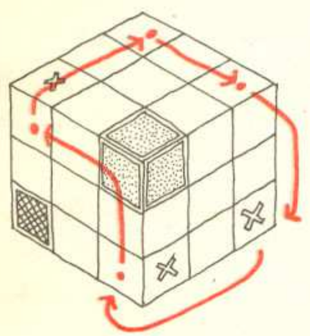
Możliwych do zrealizowania układów jest 12 razy mniej, tj. „tylko"

43252003274489856000

To i tak dość dużo. Gdyby cała ludzkość, od noworodków do starców bawiła się kostkami układając, powiedzmy 1 pozycję na sekundę, to wszystkie układy wyczerpano by po... no, dość długim czasie.

Czynnik 12, redukujący liczbę wszystkich teoretycznie możliwych ustawień bierze się z ograniczeń wiążących orientacje poszczególnych klocków: siedem klocków narożnych może być; będąc na swoich miejscach — zorientowanych dowolnie, orientacja ósmego jest już wyznaczona. Stąd czynnik 3. Podobnie orientacja 11 klocków krawędziowych wyznacza orientację dwunastego, stąd czynnik 2.

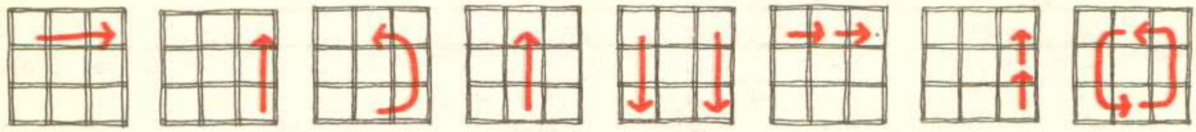
Wreszcie gdy ustawimy dowolnie 18 spośród 20 ruchomych sześcianików naszej kostki, położenie pozostałych dwóch już nie może być dowolne. Stąd czynnik 2; łącznie daje to $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ typów ustawień niemożliwych.



Rys. 3b. Wędrówka sześcianika narożnego przy kolejnych potęgach *PG*, $(PG)^2$, $(PG)^3$. Lewy dolny klocek nie zmienia położenia ani orientacji, prawy górny zostaje na miejscu, ale za każdym razem obraca się o $\frac{1}{3}$ obrotu, prawy dolny po 5 ruchach (tj. przy $(PG)^5$) wraca w położenie wyjściowe obrócony o $\frac{1}{3}$ obrotu.

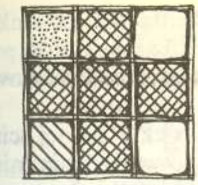
Jak bardzo skomplikowana jest nasza grupa „kostki", może ilustrować następujący przykład. Wykonajmy dwa obroty prostopadłymi skrajnymi ściankami, np. prawą i górną. Wykonajmy następne dwa obroty znów tymi samymi ściankami (choć rozkład kolorów już się zmienił na nich), i tak dalej. Po ilu razach kostka powróci do położenia wyjściowego? Cierpliwi mogą to sprawdzić eksperymentalnie, dociekliwi odczytać wynik z rysunku 3.

Po tych rozważaniach bardziej teoretycznych możemy nareszcie zabrać się do właściwej zabawy: wstawiania klocków na swoje miejsca. Podstawowe obroty naszej kostki będziemy oznaczać przez *G, F, P, L, D* i *T* (góra, przód, prawo, lewo, dół i tył). I tak *G* oznacza obrót górnej ściany o 90° w kierunku ruchu wskazówek zegara, G^{-1} to obrót tej ściany w przeciwną stronę, G^2 to obrót o 180°, G^4 to przekształcenie tożsamościowe, G^5 to *G* itd. Podobnie *F* oznacza obrót przedniej ściany o 90° zgodnie z ruchem wskazówek zegara i tak dalej. Ale częściej będziemy posługiwać się pismem obrazkowym:



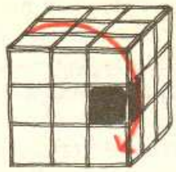
Rys. 4. Obrót górnej ściany o 90° (G^{-1}) | Obrót prawej ściany o 90° do góry (*P*) | Obrót przedniej ściany o 90° | Obrót środkowej ściany | Obrót środkowej ściany (lub dwóch skrajnych) | Obrót górnej ściany o 180° | Obrót prawej ściany o 180° | Obrót przedniej ściany o 180°

Algorytm, który tu opiszemy, składa się z kilku faz, w każdej z nich porządkujemy co innego. Ułożymy najpierw dolną (np. niebieską) ścianę, potem drugą poziomą warstwę, wreszcie trzecią.

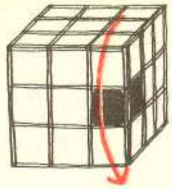


Rys. 5.

Faza I. Ułożenie klocków krawędziowych dolnej warstwy. Jej celem jest otrzymanie na dolnej ścianie krzyża jak na rysunku 5. Ściągnąć klocek na dolną ścianę ze środkowej warstwy jest bardzo łatwo, na przykład tak jak na rysunku 6.

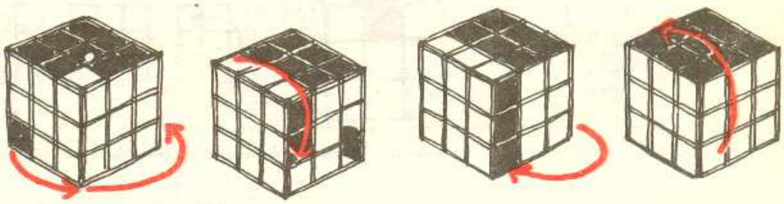


Rys. 6a.



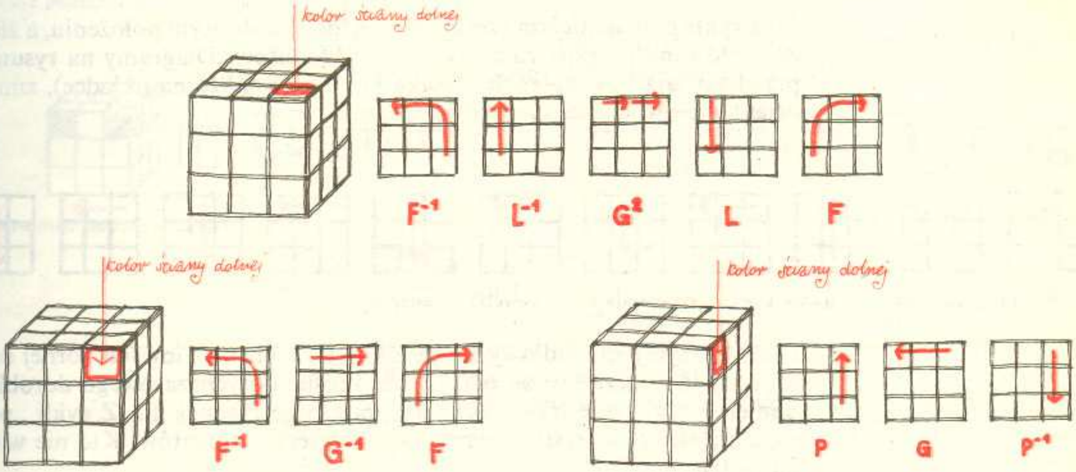
Rys. 6b.

Starajmy się to zrobić tak, by klocki od razu układały się w przypisanych im miejscach. Nie opiszemy też, jak ściągnąć sześcianik na dół z *górnej* warstwy. Zostawiamy to do samodzielnego przemyślenia. Na tym etapie mamy jeszcze dużo swobody.



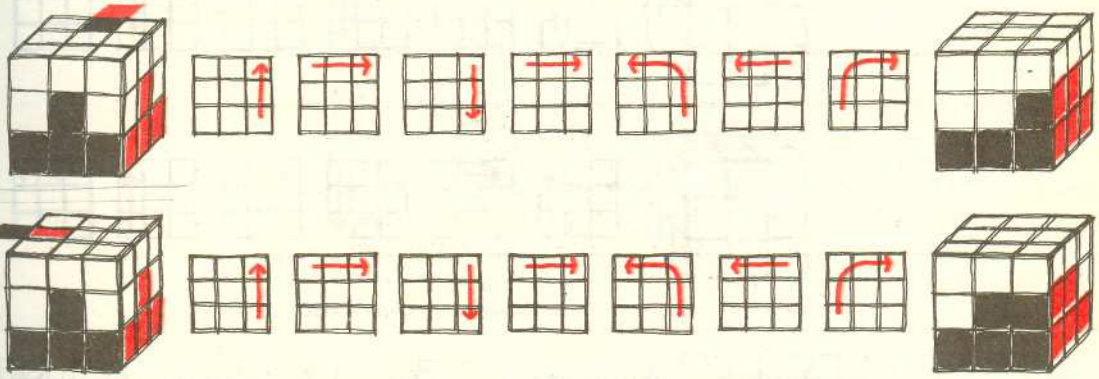
Rys. 7

Faza II. Ustawienie narożników dolnej warstwy. Dokonujemy tego, jak pokazuje rysunek 8, dobierając jeden z przedstawionych tam wariantów w zależności od orientacji wstawianego klocka. Najlepiej jednak po prostu **opracować własny system ustawiania jednej ściany.**



Rys. 8. $F^{-1}L^{-1}G^2LF$, $F^{-1}G^{-1}F$ oraz PGP^{-1}.

To nietrudne, a pozwala nabrać nieco obycia z kostką. Tak czy owak przed nami pierwszy sukces: gotowa pierwsza ściana. Po odpoczynku ruszamy dalej.

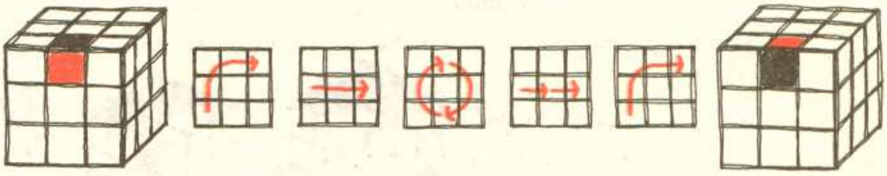


Rys. 9. Układanie drugiej warstwy kostki.

Faza III. Układanie środkowej warstwy klocków. Rysunek 9 pokazuje jak sprowadzić klocek z górnej warstwy na właściwe miejsce.

Jak i poprzednio, wybór jednego z wariantów zależy od orientacji sześcianika. Spuszczanie go z innych miejsc górnej ściany sprowadzamy do przypadków przed chwilą opisanych przez odpowiedni obrót górnej ściany. A jeżeli krawędziowy klocek drugiej warstwy jest w tej warstwie, ale na złym miejscu lub źle zorientowany, to należy na jego miejsce wstawić dowolny klocek z górnej ściany — wtedy ten zły wyskoczy na górę. Ta faza mija szybko, bo do wstawienia mieliśmy co najwyżej cztery klocki. Przed nami gotowe już dwa piętra kostki. Jeszcze tylko jedno, ale pracy zostało więcej niż trzecia część, bo teraz najtrudniej. Wykonywane przekształcenia nie mogą nam przecież zburzyć dotychczasowych wyników.

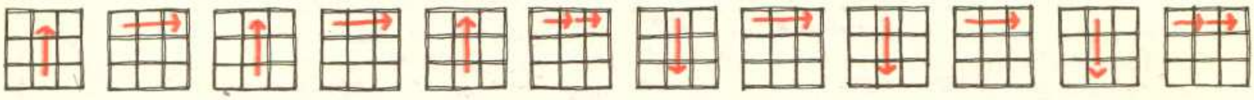
Faza IV. Ułożenie krzyża (z klocków krawędziowych) na górnej ścianie. Zaczynamy od obrócenia tych klocków „brzuszkiem ku górze", tj. tak, by ich górny kolor znalazł się na górnej ścianie. Aby tego dokonać, wystarczy znać dwa układy ruchów. Zmieniają one jednocześnie orientację dwóch klocków krawędziowych. Dokonują też innych zmian na górnej ścianie, ale to na razie nie szkodzi (rys. 10a i 10b).



Rys. 10a. Zmiana orientacji klocków górnej ściany.

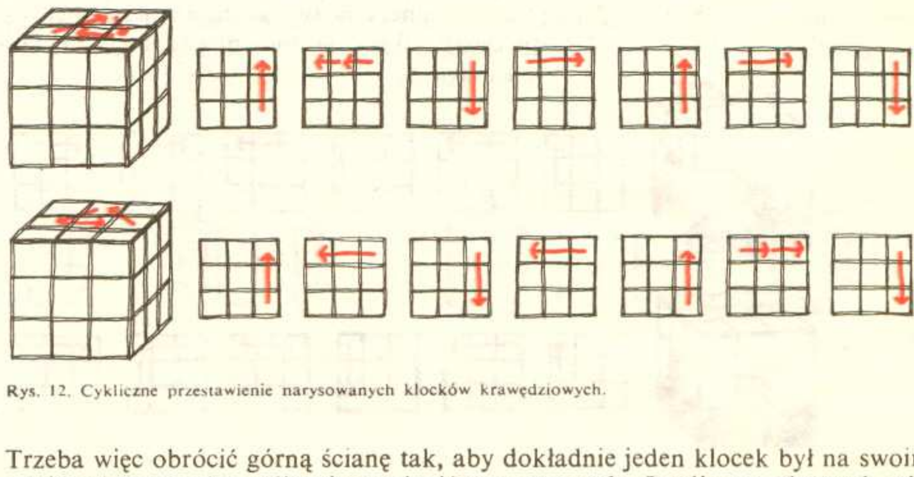
Rys. 10b. Zmiana orientacji klocków górnej ściany (wariant II).

To zwykle najtrudniejsza część pracy. Klocek w dobrym położeniu, a źle zorientowany przysparza zwykle wielu kłopotów. Diagramy na rysunku 11 przedstawiają tzw. **operację Rubika** (widoczną także na okładce), zmieniającą orientację dwóch sześcianików.



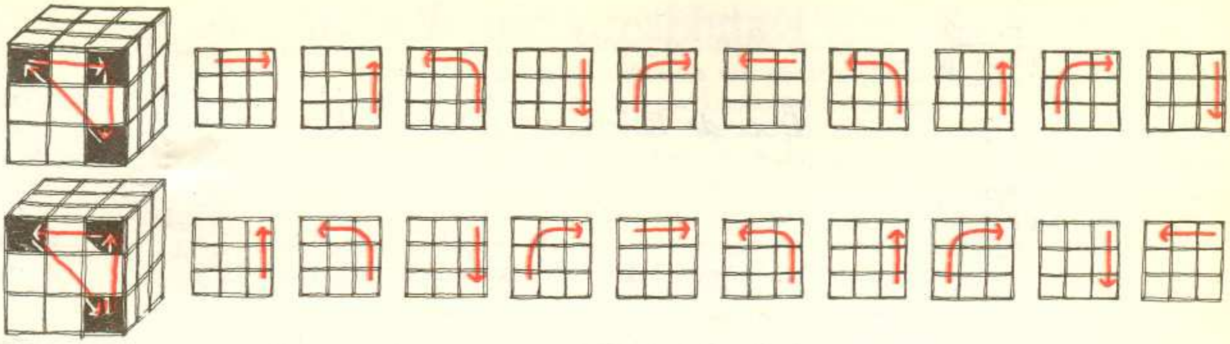
Rys. 11. Operacja Rubika zmienia orientację dwóch klocków krawędziowych, a nie rusza pozostałych.

Teraz ułożymy prawidłowy krzyż z klocków krawędziowych górnej ściany. Musimy je poprzestawiać tak, by nie zepsuć dotychczasowego dorobku. Jak zamienić cyklicznie trzy sześcianiki, pokazuje rysunek 12. Z cykli „po trzy" możemy złożyć wszystkie permutacje czterech elementów. Kto nie wierzy, niech sprawdzi.



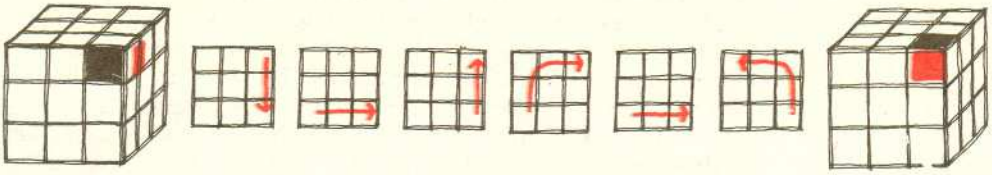
Rys. 12. Cykliczne przestawienie narysowanych klocków krawędziowych.

Trzeba więc obrócić górną ścianę tak, aby dokładnie jeden klocek był na swoim miejscu i następnie cyklicznie zamienić trzy pozostałe. Jeżeli przy obrotach górnej ściany zawsze ustawiają się nam dwa klocki na swoich miejscach (albo żaden), należy przestawić dowolne trzy i próbować jeszcze raz.

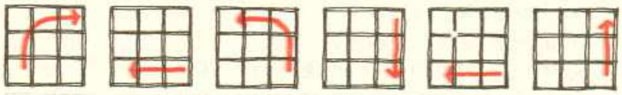


Rys. 13. Cykliczna zmiana narożników.

Uff! Już blisko. Teraz tylko ustawiamy narożniki, znów cyrkulując po trzy (rys. 13) i orientujemy je. Przekształcenie $P^{-1}DPFDF^{-1}$ (rys. 14) przekręca narożnik, ale dokonuje też wielu innych zmian. Dlatego trzeba zmieniać jednocześnie orientację 2 klocków: (rys. 14a i 14b).

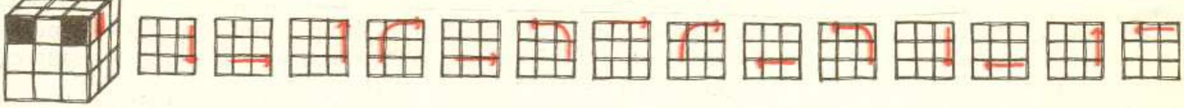


Rys. 14a. Zmiana orientacji narożnika...



Rys. 14b. ... musi być połączona ze zmianą orientacji innego.

Jednoczesny obrót sąsiednich narożników przedstawia rysunek 15.
Finis coronat opus. Koniec wieńczy dzieło, kostka ułożona.



Rys. 15. Zmiana orientacji sąsiednich narożników.

Czy są jeszcze inne algorytmy?
Oczywiście, bez liku (patrz np. „*Przekrój*" nr 1897 (1981) lub „*Młody Technik*" 1 (1982). Można zaczynać od układania narożników albo od środkowych klocków. Osoby, które już umieją ułożyć całą kostkę, mają prawo do tytułu Kubisty, a jeżeli wyślą 2 dolary (+opłata na przesyłkę) do firmy produkującej kostki (*Ideal Toy Corporation, 184—10 Jamaica Avenue, Hollis, NY 11423, USA*), otrzymają śliczną kolorową broszurkę, na kredowym papierze, z ciekawymi informacjami, a w załączeniu formularz do świadectwa Kubisty. Po wypełnieniu formularza firma przyśle im bardzo piękny certyfikat.

Czy na ułożeniu kostki kończy się zabawa? Zdecydowanie nie. Nauczcie się układać inne wzory. A oto poważniejsze pytania:

1. Jak udowodnić, że algorytm zawsze skutecznie zadziała?

2. W ilu ruchach gwarantuje on ułożenie kostki? Najszybsze znane dziś dochodzą do 50, wiadomo, że poniżej 17 zejść się nie da, a przewiduje się istnienie 22—23-ruchowego. Wymyślcie własne operacje, przyspieszające algorytm, albo takie, które łatwiej zapamiętać (np. $FPFPFP^{-1}F^{-1}P^{-1}F^{-1}P^{-1}$, co ona przestawia?). Pożyteczna jest operacja $F^2PFP^{-1}FPF^2P^{-1}$, przyspieszająca ustawienie narożników. Prościutkie $LP^{-1}F^2L^{-1}PG^2$ i odwrotne $G^2P^{-1}LF^2PL^{-1}$ przestawiają trzy sześcianiki środkowego plasterka i tak dalej i tak dalej. Miłego kręcenia.

Rys. 16. Ładny wzorek.

Rys. 17. Co otrzymamy wykonując tę operację na ułożonej kostce?