Rozwiązanie zadania M 291.

Oznaczając $p = \frac{a+b+c}{2}$ mamy

$$h_a = = \frac{2S}{a} = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \sqrt{p(p-a)}\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{a^2}} =$$

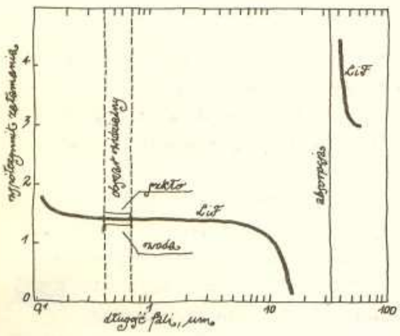
$$= \sqrt{p(p-a)}\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{a^2}} \leqslant \sqrt{p(p-a)}$$

i analogicznie $h_b \leqslant \sqrt{p(p-b)}$, $h_c \leqslant \sqrt{p(p-c)}$, przy czym równości zachodzą gdy odpowiednio $b = c$, $a = c$, $a = b$.

Mamy stąd

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \leqslant p(p-a) + p(p-b) + p(p-c) = p^2,$$

przy czym równość zachodzi tylko dla trójkąta równobocznego.



rys. 5. Zależność współczynnika załamania od długości fali dla kryształu fluorku litu (LiF). Dla porównania dorysowano zależności współczynnika załamania od długości fali dla szkła i wody w zakresie widzialnym.

5. Emisja.

Jeżeli w naszych mikrooscylatorach ładunek ujemny może się przesuwać ruchem drgającym względem dodatniego, to taki układ może wysyłać promieniowanie elektromagnetyczne. Jest to zjawisko podobne do wysyłania fali elektromagnetycznej przez antenę radiową, w której poruszają się ujemne elektrony względem dodatnich jonów metalu. Emitowana fala ma częstość równą częstości drgań własnych ,,mikrooscylatorów". Dlatego zjawisko pochłaniania i emisji zachodzi dla tych samych częstości.

Aby ,,mikrooscylatory" zaczęły drgać, trzeba im dostarczyć energię. Jest to możliwe na wiele sposobów. Oto niektóre przykłady:

a) Zderzenia ,,mikrooscylatorów" ze sobą. Na tej zasadzie pobudzane są do drgań atomy sodu w palniku.

b) Zderzenia ,,mikrooscylatorów" z elektronami. Tak powstaje świecenie atomów gazu w wyładowaniu jarzeniowym (w neonówce, w lampie sodowej).

c) Pobudzenie do świecenia przez falę elektromagnetyczną. Zjawisko takiego świecenia — równoczesne z procesem absorpcji — pojawia się np. przy oświetleniu chłodnych (nieświecących) par sodu światłem o odpowiedniej częstości. Nazywamy je ,,fluorescencją rezonansową".

6. Załamanie.

Przypadek załamania omówić najtrudniej, bo wymagałoby to rozwiązania równań Maxwella dla fali rozchodzącej się w ośrodku materialnym. Pozostaniemy więc przy kilku najprostszych uwagach:

Ośrodek materialny tym różni się od próżni, że przychodząca fala elektromagnetyczna może w nim wywołać prądy elektryczne, polegające na ruchu ładunków ,,mikrooscylatorów". Jeżeli częstość fali różni się od częstości własnej, czyli nie są spełnione warunki rezonansu, amplituda drgań po krótkim okresie wstępnym ustala się — nie ma więc zjawiska absorpcji. Fakt powstania drgań ładunków przejawia się jednak jako istnienie różnego od jedności współczynnika załamania ośrodka materialnego. Wtedy, kiedy wzbudzone drgania są słabe, współczynnik załamania jest stosunkowo niewiele różny od jedności. Kiedy drgania są duże i zgodne w fazie z polem elektrycznym fali — czyli na przykład dla częstości niewiele niższej od częstości rezonansowej — współczynnik załamania staje się bardzo duży (dla LiF obserwowana była np. wartość $n = 4{,}5$ — mówiliśmy już o tym poprzednio). Kiedy drgania są silne, ale zachodzą w przeciwfazie z polem współczynnik załamania może stać się znacznie mniejszy od jedności (dla LiF obserwowano wartość $n = 0{,}2$).

Stosunkowo proste pojęciowo rachunki pokazują na bardzo dobrą zgodność ,,oscylatorowego modelu" substancji z eksperymentem. Polegają one po prostu na obliczeniu, jak rozchodzi się fala elektromagnetyczna w ośrodku, w którym istnieją ,,mikrooscylatory", których ruch opisuje wzór (12). Przeprowadzenie ich wymaga jednak wiadomości — zarówno z fizyki, jak i z matematyki — znacznie przekraczających zakres szkolny.

7. Podsumowanie.

Z tego co powiedzieliśmy powyżej widać, że ,,oscylatorowy model" zadziwiająco dobrze opisuje oddziaływanie promieniowania elektromagnetycznego z materią. Powstaje jednak natychmiast pytanie: co to są te ,,mikrooscylatory"? Jaka jest ich fizyczna natura? Do tych spraw przejdziemy w następnej części cyklu.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji ,,Delty"

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4 - 3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

Klub 44

Zadania nr 19, 20, 21

Termin nadsyłania rozwiązań: do 31.VII.1982

19. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste x, dla których jest spełniona nierówność

$$\sin(\cos x) < \cos(\sin x).$$

20. Ściany $2n$-ścianu wypukłego opisanego na kuli pomalowano na czerwono i zielono tak, by sąsiednie ściany były różnych kolorów. Czy czerwonych ścian musi być tyle samo, co zielonych? Czy pola powierzchni: czerwonej i zielonej muszą być równe?

21. Każda funkcja różniczkowalna ma pochodną ciągłą (! ?) Wskazać błąd w poniższym rozumowaniu: Niech f będzie funkcją różniczkowalną. Pisząc

$$\varepsilon = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)$$

widzimy, że $f(x+h) = f(x)+hf'(x)+h\varepsilon$, gdzie $\varepsilon \to 0$ przy $h \to 0$. Podstawiając tu kolejno: (1) $x = 0, h = 2t$, (2) $x = 0, h = t$, (3) $x = h = t$, otrzymujemy układ równości

$$f(2t) = f(0)+2tf'(0)+2t\varepsilon_1,\ \varepsilon_1 \to 0 \text{ przy } t \to 0,$$
$$f(t) = f(0)+tf'(0)+t\varepsilon_2,\ \varepsilon_2 \to 0 \text{ przy } t \to 0,$$
$$f(2t) = f(t)+tf'(t)+t\varepsilon_3,\ \varepsilon_3 \to 0 \text{ przy } t \to 0,$$

z którego możemy wyznaczyć $f'(t)$:

$$f'(t) = \frac{f(2t)-f(t)}{t} - \varepsilon_3 = f'(0)+2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3.$$

Ostatnie wyrażenie dąży do $f'(0)$, gdy $t \to 0$, a więc funkcja f' jest ciągła w punkcie 0.

Rozwiązania zadań z numeru 11/81

7. Odpowiedź jest twierdząca: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. **Dowód:** Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas, z uwagi na ciągłość f, w dowolnie małym prawostronnym otoczeniu zera leży przedział, na którym $|f| > \varepsilon > 0$. Określmy ciąg takich przedziałów $I_0, I_1, I_2, \ldots, I_k = \langle a_k, b_k\rangle$, wybierając I_0 dowolnie, a dalej żądając, by

$$I_k \subset \left(0, \frac{b_{k-1}-a_{k-1}}{2}\right) \quad \text{oraz} \quad \frac{a_k}{b_k} > \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2b_{k-1}}.$$

Prosty rachunek pokazuje, że wówczas różnica liczb b_{k-1}/b_k i a_{k-1}/a_k jest większa od 1; można zatem między te liczby wstawić liczbę naturalną m_k. Mamy więc $a_{k-1} < m_k a_k$, $b_{k-1} > m_k b_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Oznaczmy: $n_k = m_1 m_2 \ldots m_k$, $J_k = \langle n_k a_k, n_k b_k\rangle$. Z uzyskanych nierówności wynika, że $J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \ldots$. Istnieje więc punkt $x \in \bigcap J_k$, czyli taki, że $x/n_k \in I_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Zatem $|f(x/n_k)| \geqslant \varepsilon$, wbrew warunkowi zadania.

8. Niech K, L, M, N, P, Q oznaczają odpowiednio środki krawędzi AB, CD, AC, BD, AD, BC danego czworościanu $ABCD$. Z relacji $KM \| BC \| LN$, $KM = \frac{1}{2} BC = LN$, $KN \| AD \| LM$, $KN = \frac{1}{2} AD = LM$ i z założenia $AD = BC$ wynika, że czworokąt $KMLN$ jest rombem, a więc jego przekątne KL i MN są prostopadłe i połowią się. Takie same stwierdzenie dotyczy — analogicznie — par odcinków MN i PQ oraz PQ i KL. Stąd teza.

9. Ponieważ OWCA $\geqslant$ 1023, a STADO $\leqslant$ 98765, więc $n \leqslant 96$. Będziemy szukać rozwiązań z $n \geqslant 50$. Jeśli takie rozwiązanie istnieje, to literze O musi odpowiadać cyfra 1. Wówczas iloczyn $n\cdot$ OWCA = STADO kończy się cyfrą 1, zatem ostatnimi cyframi czynników muszą być 1 i 1 albo 9 i 9 albo 3 i 7. Ale A $\neq$ 1, skoro O = 1. Pozostają możliwości: A = 3, $n = 10k+7$, lub A = 7, $n = 10k+3$, lub A = 9, $n = 10k+9$. Bierzemy teraz największą możliwą wartość $n = 93$; wtedy A = 7, STADO $\leqslant$ 98761, stąd OWCA = STADO:$n \leqslant 1061$, więc W = 0 i OWCA = 10C7; podstawiając za C kolejne niezajęte cyfry sprawdzamy, czy któraś z nich daje rozwiązanie zagadki. Okazuje się, że nie — bierzemy więc $n = 89$ i postępujemy podobnie, i dalej, dla $n = 87, 83, 79, 77, \ldots$ Pozostawiamy sprytowi Czytelników znalezienie takiej metody liczenia, aby przebadanie wszystkich wartości $n > 50$ zajęło nie więcej, niż kwadrans zabawy z kalkulatorem.

W przedziale $50 \leqslant n \leqslant 96$ zagadka ma dwa rozwiązania: $63\cdot 1567 = 98721$ i $53\cdot 1297 = 68741$. Odpowiedź: $n_{\max} = 63$.

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA