# Oddziaływanie promieniowania elektromagnetycznego z materią

## Część II. Model oscylatorowy

*Doc. dr Jerzy GINTER*

W poprzednim artykule z tego cyklu omówiliśmy podstawowe doświadczalne zależności pomiędzy zjawiskami absorpcji, emisji i załamania promieniowania elektromagnetycznego. Aby chociaż jakościowo zrozumieć omawiane zagadnienia, musimy dokonać teraz dłuższej dygresji — przypomnieć i rozszerzyć wiadomości, dotyczące układów poruszających się harmonicznym ruchem drgającym, czyli tzw. ,,oscylatorów harmonicznych''.

### 1. Oscylator swobodny.

Dobrze znanym przykładem oscylatora harmonicznego jest wahadło. (Innym przykładem może być kulka zawieszona na sprężynie). Wiadomo, że dla małych wychyleń pozioma siła $F$ działająca na kulkę wahadła jest proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi $x$:

$$F = -kx. \tag{1}$$

Jeżeli na kulkę wahadła nie działa w kierunku poziomym żadna inna siła, II zasada dynamiki prowadzi do równania

$$ma = -kx. \tag{2}$$

Przypomnijmy, że przyspieszenie jest drugą pochodną wychylenia względem czasu

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Ruch oscylatora określa więc równanie

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{3}$$

Wiadomo, że rozwiązania tego równania odpowiadają zależności periodycznej

$$x = A\sin\omega_0 t. \tag{4}$$

Łatwo to sprawdzić przez podstawienie, pamiętając, że $\frac{d^2}{dx^2}(\sin ax) = -a^2\sin ax$. $A$ jest wielkością dowolną, zwaną amplitudą ruchu. Częstość kołowa $\omega_0$ jest określona wzorem ($T$ oznacza okres drgań):

$$\omega_0 = m\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{5}$$

Przypadek ruchu bez żadnych sił dodatkowych nazywamy przypadkiem oscylatora swobodnego.

### 2. Oscylator wymuszony.

Nas jednak będzie interesować przypadek bardziej złożony: kiedy na oscylator działa jeszcze siła ,,zewnętrzna'', periodycznie zależna od czasu

$$F = F_0\sin\omega t. \tag{6}$$

Częstość kołowa $\omega$ tej siły jest na ogół różna od częstości drgań własnych $\omega_0$. Przykładem realizacji takiego układu może być wahadło z kulką stalową, pobudzane do drgań elektromagnesem, zasilanym prądem przemiennym (rys. 1).

II zasada dynamiki prowadzi teraz do równania

$$ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_0\sin\omega t. \tag{7}$$

Można przypuszczać, że ruch pod wpływem siły periodycznie zmiennej o częstości $\omega$ będzie ruchem periodycznym z tą właśnie częstością (różną od częstości własnej $\omega_0$).

Zależność $x$ od $t$ ma więc postać

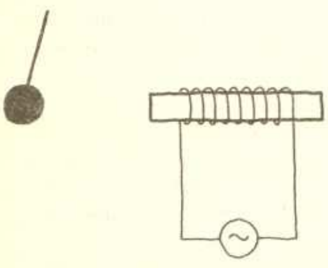
$$x = A\sin\omega t. \tag{8}$$

**Rozwiązanie zadania M 290.**

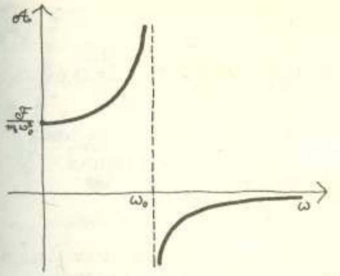
Oznaczmy przez $m_k m_{k-1} \ldots m_1 m_0$ zapis dziesiętny $m$ a przez $S(m)$ sumę cyfr $m$. Ponieważ $S(10^p \cdot m) = S(m)$, możemy założyć, że $m_0 \neq 0$. Dla $l > k$ i $n = 10^l - 1 = \underbrace{99 \ldots 9}_{l \text{ dziewiątek}}$ mamy

$$m \cdot n = 10^l m - m = \overline{m_k \ldots m_0 \underbrace{0 \ldots 0}_{l \text{ zer}}} - \overline{m_k \ldots m_0} = \overline{m_k \ldots (m_0-1)\underbrace{9 \ldots 9}_{l-k \text{ dziewiątek}}(9-m_k) \ldots (9-m_1)(10-m_0)}$$

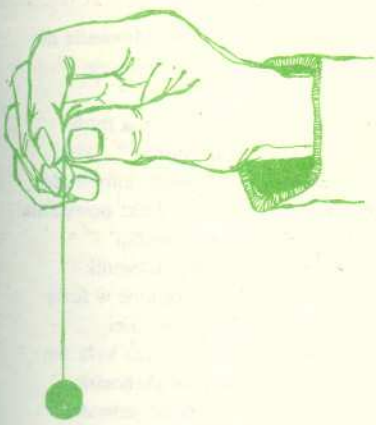
i $S(mn) = 9l = S(n)$.



rys. 1



rys. 2. Przebieg zależności wychylenia od czasu zgodnie z wzorem (12)



rys. 3



rys. 4. Schematycznie przedstawiony przebieg współczynnika załamania (a) i absorpcji (b) jako funkcji częstości.

Sprawdźmy, że wyrażenie (8) jest rozwiązaniem równania (7). Podstawiając (8) do (7) uzyskujemy

$$m(-\omega^2)A\sin\omega t = -kA\sin\omega t + F_0\sin\omega t. \tag{9}$$

Przenosząc wyrazy zawierające $A$ na lewą stronę i dzieląc obie strony przez $m\sin\omega t$ (która to wielkość na ogół różna jest od zera), dostajemy

$$\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) A = \frac{F_0}{m}. \tag{10}$$

Możemy teraz już wyznaczyć $A$, które nie jest dowolne, ale jednoznacznie wyznaczone przez częstość i stałe występujące w równaniu. Zauważmy przy tym, że $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, zgodnie z wyrażeniem (5). Mamy więc (dla $\omega \neq \omega_0$)

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{11}$$

i ostatecznie zależność wychylenia od czasu

$$x = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin\omega t. \tag{12}$$

Musimy teraz przedyskutować uzyskany wynik. Wykres zależności $A$ od $\omega$ przedstawia rysunek 2. Widać, że dla bardzo małych częstości ($\omega \to 0$) amplituda $A$ dąży do wartości $A = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$.
W zakresie pomiędzy zerem a $\omega_0$ amplituda jako funkcja częstości rośnie. Ważne jest jednak, że dla określonego $\omega$ jej wartość jest ustalona. Ponieważ w naszych rozważaniach nie uwzględniliśmy zjawiska rozpraszania energii, oznacza to, że po ustaleniu się drgań (czyli poza krótkim okresem początkowym) energia średnio nie jest do układu dostarczana ani od niego odbierana.
Dla częstości kołowej $\omega$ równej częstości własnej układu $\omega_0$ wzór (11) nie daje określonej wartości $A$, bo mianownik znika. Jest to przypadek ścisłego rezonansu. Rozwiązanie (8) nie opisuje prawidłowo zachodzących procesów. Naprawdę dla ścisłego rezonansu mielibyśmy do czynienia z ruchem z amplitudą rosnącą, a nie ustaloną (jak przy rozhuśtywaniu huśtawki). Mamy więc do czynienia z pobieraniem energii przez oscylator od źródła siły periodycznej (absorpcją energii).
Dla $\omega > \omega_0$ obserwujemy wynik dość dziwny — drganie zmienia fazę. Ponieważ $A$ jest mniejsze od zera, wychylenie ma zwrot przeciwny w stosunku do działającej siły. Łatwo stwierdzić, że jest to prawda. Trzeba mieć tylko piłeczkę (albo dowolny inny ciężarek) na gumce (rys. 3). Przy poruszaniu ręką z częstością mniejszą od częstości własnej piłeczka wychyla się zgodnie ze zwrotem ruchów ręki. Dla pobudzenia z częstością większą od rezonansowej jest odwrotnie. Dla $\omega \to \infty$ amplituda dąży do zera.

## 3. Oscylatorowy model absorpcji, emisji i załamania promieniowania elektromagnetycznego.

Rys. 4 przedstawia schematyczną zależność współczynnika załamania substancji materialnej od częstości promieniowania elektromagnetycznego. Jest to po prostu przedrukowany rysunek 4 z pierwszej części artykułu. Porównanie z rysunkiem 2, przedstawiającym zależność amplitudy oscylatora harmonicznego od częstości siły pobudzającej wskazuje na uderzające podobieństwo obu tych wykresów. Nasuwa się więc następująca hipoteza: być może w ciałach materialnych istnieją jakieś ,,mikrooscylatory" harmoniczne. Muszą one występować w gazie atomowym — np. w parach sodu. W tym przypadku najprawdopodobniej są nimi same atomy. Muszą także występować w cieczach i w ciałach stałych — takich jak na przykład omawiany poprzednio fluorek litu. Ponadto ,,poszczególne części" tych oscylatorów muszą mieć ładunek elektryczny, bo może je pobudzać do drgań fala elektromagnetyczna. Spróbujmy naszkicować teraz, jak w tym modelu ,,mikrooscylatorów" można byłoby opisać absorpcję, emisję i załamanie promieniowania.

## 4. Pochłanianie.

Zgodnie z naszym założeniem w ośrodku materialnym istnieją ,,mikrooscylatory" o określonych częstościach własnych — pewnych wartościach $\omega_0$. Fala elektromagnetyczna może pobudzać je do drgań. Jeżeli $\omega \neq \omega_0$, to nie zachodzi absorpcja energii (por. rozważania w punkcie 2 tego artykułu). Absorpcja energii zachodzi natomiast dla ścisłego rezonansu, czyli $\omega = \omega_0$. W rzeczywistości bardzo często mamy do czynienia z oddziaływaniem pola elektrycznego fali na naładowane ,,części mikrooscylatorów" zgodnie ze wzorem $\vec{F} = q\vec{E}$. Możliwe jest jednak także oddziaływanie z polem magnetycznym fali.
Warto przy tym zwrócić uwagę, że na ogół temperatura ciała absorbującego wzrasta. Musi więc istnieć jakiś sposób zamiany energii drgań ,,mikrooscylatorów" ciała na energię termiczną. Procesów tych jednak nie będziemy dokładniej omawiać.

Rozwiązanie zadania M 291.

Oznaczając $p=\frac{a+b+c}{2}$ mamy

$$h_a = = \frac{2S}{a} = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \sqrt{p(p-a)}\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{a^2}} =$$

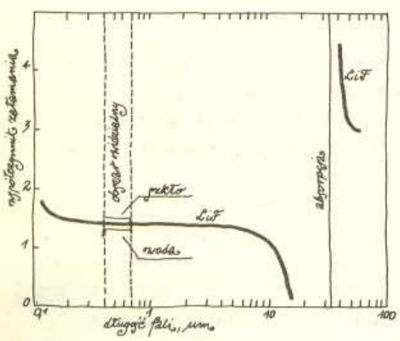
$$= \sqrt{p(p-a)}\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{a^2}} \leqslant \sqrt{p(p-a)}$$

i analogicznie $h_b \leqslant \sqrt{p(p-b)}$, $h_c \leqslant \sqrt{p(p-c)}$, przy czym równości zachodzą gdy odpowiednio $b=c$, $a=c$, $a=b$.

Mamy stąd

$$h_a^2+h_b^2+h_c^2 \leqslant p(p-a)+p(p-b)+p(p-c)=p^2,$$

przy czym równość zachodzi tylko dla trójkąta równobocznego.




rys. 5. Zależność współczynnika załamania od długości fali dla kryształu fluorku litu (LiF). Dla porównania dorysowano zależności współczynnika załamania od długości fali dla szkła i wody w zakresie widzialnym.

## 5. Emisja.

Jeżeli w naszych mikrooscylatorach ładunek ujemny może się przesuwać ruchem drgającym względem dodatniego, to taki układ może wysyłać promieniowanie elektromagnetyczne. Jest to zjawisko podobne do wysyłania fali elektromagnetycznej przez antenę radiową, w której poruszają się ujemne elektrony względem dodatnich jonów metalu. Emitowana fala ma częstość równą częstości drgań własnych ,,mikrooscylatorów''. Dlatego zjawisko pochłaniania i emisji zachodzi dla tych samych częstości.

Aby ,,mikrooscylatory'' zaczęły drgać, trzeba im dostarczyć energię. Jest to możliwe na wiele sposobów. Oto niektóre przykłady:

*a*) Zderzenia ,,mikrooscylatorów'' ze sobą. Na tej zasadzie pobudzane są do drgań atomy sodu w palniku.

*b*) Zderzenia ,,mikrooscylatorów'' z elektronami. Tak powstaje świecenie atomów gazu w wyładowaniu jarzeniowym (w neonówce, w lampie sodowej).

*c*) Pobudzenie do świecenia przez falę elektromagnetyczną. Zjawisko takiego świecenia — równoczesne z procesem absorpcji — pojawia się np. przy oświetleniu chłodnych (nieświecących) par sodu światłem o odpowiedniej częstości. Nazywamy je ,,fluorescencją rezonansową''.

## 6. Załamanie.

Przypadek załamania omówić najtrudniej, bo wymagałoby to rozwiązania równań Maxwella dla fali rozchodzącej się w ośrodku materialnym. Pozostaniemy więc przy kilku najprostszych uwagach:

Ośrodek materialny tym różni się od próżni, że przychodząca fala elektromagnetyczna może w nim wywołać prądy elektryczne, polegające na ruchu ładunków ,,mikrooscylatorów''. Jeżeli częstość fali różni się od częstości własnej, czyli nie są spełnione warunki rezonansu, amplituda drgań po krótkim okresie wstępnym ustala się — nie ma więc zjawiska absorpcji. Fakt powstania drgań ładunków przejawia się jednak jako istnienie różnego od jedności współczynnika załamania ośrodka materialnego. Wtedy, kiedy wzbudzone drgania są słabe, współczynnik załamania jest stosunkowo niewiele różny od jedności. Kiedy drgania są duże i zgodne w fazie z polem elektrycznym fali — czyli na przykład dla częstości niewiele niższej od częstości rezonansowej — współczynnik załamania staje się bardzo duży (dla LiF obserwowana była np. wartość $n = 4{,}5$ — mówiliśmy już o tym poprzednio). Kiedy drgania są silne, ale zachodzą w przeciwfazie z polem współczynnik załamania może stać się znacznie mniejszy od jedności (dla LiF obserwowano wartość $n = 0{,}2$).

Stosunkowo proste pojęciowo rachunki pokazują na bardzo dobrą zgodność ,,oscylatorowego modelu'' substancji z eksperymentem. Polegają one po prostu na obliczeniu, jak rozchodzi się fala elektromagnetyczna w ośrodku, w którym istnieją ,,mikrooscylatory'', których ruch opisuje wzór (12). Przeprowadzenie ich wymaga jednak wiadomości — zarówno z fizyki, jak i z matematyki — znacznie przekraczających zakres szkolny.

## 7. Podsumowanie.

Z tego co powiedzieliśmy powyżej widać, że ,,oscylatorowy model'' zadziwiająco dobrze opisuje oddziaływanie promieniowania elektromagnetycznego z materią. Powstaje jednak natychmiast pytanie: co to są te ,,mikrooscylatory''? Jaka jest ich fizyczna natura? Do tych spraw przejdziemy w następnej części cyklu.

# Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty''

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.