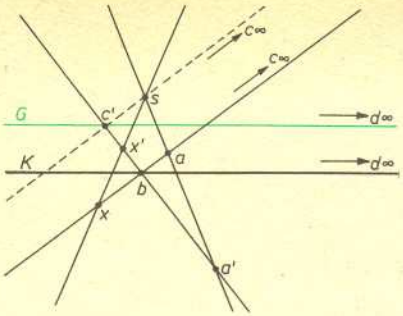


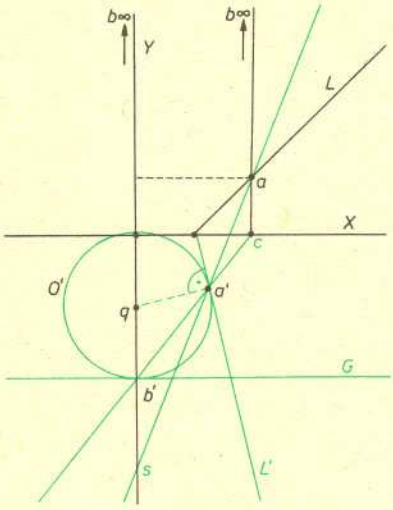
Rys. 3

Na tak wzbogaconej płaszczyźnie (zwanej płaszczyzną rzutową) każde dwie proste przecinają się, parabola i hiperbola stają się krzywymi zamkniętymi, ale ... nie wnikajmy aż w takie szczegóły. Przetłumaczmy nasze zdanie odnoszące się do płaszczyzny rzutowej na język zwykłej płaszczyzny: „Połączyć punkt s z punktem niewłaściwym jakiejś prostej L" oznacza „poprowadzić przez s prostą równoległą do L".

Określę teraz kolineację osiową płaszczyzny rzutowej. Niech będzie dana prosta K (oś kolineacji) i punkt s (środek kolineacji) poza nią. Przyjmijmy jeszcze dwa punkty a, a' takie, że s leży na prostej aa' ($a \neq s \neq a'$ i $a \notin K$ i $a' \notin K$).

Położenie x' — obrazu punktu x płaszczyzny — określone jest dwoma warunkami:

1) Punkty s, x, x' mają być współliniowe;
2) Każda prosta (np. ax) i jej obraz ($a'x'$) przecinają się na prostej K.



Rys. 4

Spójrzmy na rysunek 3. Pokazano tam przede wszystkim, jak znaleźć obraz zadanego punktu x. Punktu x' szukamy na prostej sx (bo s, x, x' mają być współliniowe) i jednocześnie na prostej ba' (gdzie b jest punktem, w którym prosta ax przecina oś kolineacji).

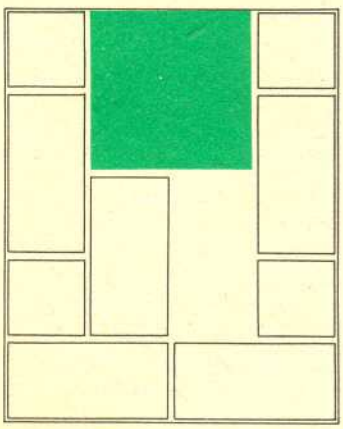
Ale to nie wszystko. Połączmy punkt s z punktem niewłaściwym (c^∞) prostej ax (czyli wykreślamy przez s równoległą do ax). Jako obraz punktu niewłaściwego otrzymamy ... punkt c'. I to nie przypadek. Łatwo sprawdzić, że obrazem **dowolnego** punktu niewłaściwego (prócz d^∞ na K) jest tu punkt właściwy. Mało tego. Obrazy wszystkich punktów niewłaściwych płaszczyzny leżą na jednej prostej (zwanej prostą **graniczną**), równoległej do osi K.
Teraz już chyba łatwo dostrzec, że kolineacja osiowa może przeprowadzić dowolną stożkową na elipsę (wszystkie punkty właściwe), a nawet na okrąg. Dokonajmy tego np. dla paraboli zadanej równaniem $x^2 - 4y = 0$. Wierzchołkiem tej paraboli jest $p(0, 0)$, jej osią oś Y układu współrzędnych, a skoro dla $x = 2$ jest $y = 1$, to punkt $a(2, 1)$ należy do tej paraboli. I to nam wystarczy.

Przyjmijmy okrąg O o środku q styczny do osi X jako ten, na który ma przejść parabola (rys. 4). Oś X niech będzie osią kolineacji, a prosta G równoległa do X i styczna do O — prostą graniczną. Obrazem punktu b^∞ paraboli jest tu punkt b' na G. Znajdźmy jeszcze obraz punktu a: połączmy a z b linią prostą (czyli poprowadźmy przez a równoległą do Y) przecinającą oś X w punkcie c; $\overline{cb'}$ przecina okrąg w szukanym punkcie a'. Środek kolineacji uzyskamy jako punkt s przecięcia prostych $b^\infty b'$ i aa'.

Gdyby nam teraz polecono znaleźć punkty wspólne paraboli zadanej (ale nie narysowanej; bo jak?) z jakąś prostą, znaleźlibyśmy obraz prostej przy tej kolineacji osiowej, wykonalibyśmy konstrukcję na okręgu i prostej i ... wrócilibyśmy na prostą i parabolę. Na rysunku 4 rozwiązałem konstrukcyjnie inne zadanie: Przez dany punkt a poprowadzić do naszej paraboli *styczną*. Gdy ma się już skonstruowany okrąg, będący obrazem paraboli przy określonej kolineacji, rozwiązanie sprowadza się do wykreślenia L' stycznej do okręgu w punkcie a' (obraz punktu a) i znalezienia jej przeciwobrazu — L.

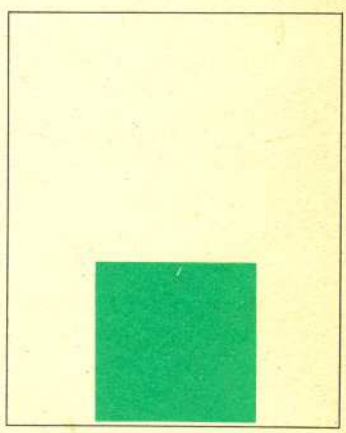
Gra

W starym belgijskim czasopiśmie „Math-Jeunes" znaleźliśmy jeszcze jednego protoplastę kostki Rubika. W prostokącie 4×5 jest 10 żetonów ułożonych jak na rysunku z lewej. Celem gry jest przemieszczenie dużego kwadratu 2×2 w położenie jak na rysunku z prawej, przez przesuwanie prostokątnych żetonów poziomo i pionowo. Według „Math-Jeunes" wymaga to ponad 100 posunięć.



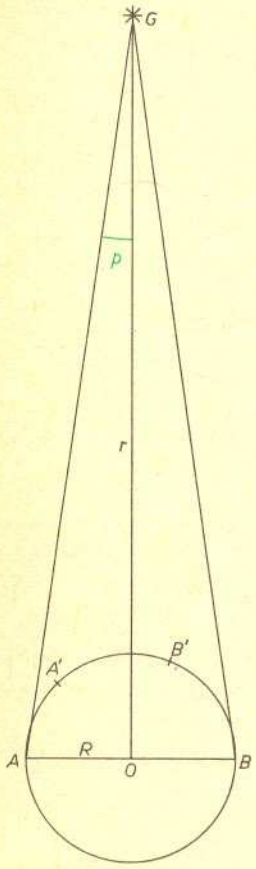
Można oczywiście wybrać sobie inne docelowe położenie kolorowego kwadratu. Czy każde?

A oto bardziej skomplikowane pytanie. Czy można w naszej układance przestawić dowolne dwa np. kwadraciki 1×1 (albo: dwa dolne poziome prostokąty) nie zmieniając położenia pozostałych klocków? Nie wiemy.



Jak w nocy zmierzyć odległość Słońca?

Dr Tomasz KWAST



Triangulacja jest powszechnie stosowaną metodą mierzenia rozmiarów i kształtu Ziemi. Jest to metoda elegancka dzięki swej prostocie, a zarazem dostatecznie dokładna na potrzeby współczesnej nauki. Coś w rodzaju triangulacji stosuje się też w astronomii w celu wyznaczania odległości ciał niebieskich. Jej idea polega na zaobserwowaniu położenia interesującego nas obiektu na tle gwiazd (uważanych za nieskończenie dalekie) z dwóch dostatecznie odległych punktów przestrzeni. W przypadku Ziemi najbardziej odległe obserwatoria mogą leżeć na przeciwnych końcach A i B średnicy Ziemi (patrz rysunek), nie jest to jednak konieczne. Obserwatorzy mogą znajdować się w dość dowolnych punktach A' i B' i z nich obserwować obiekt G, gdyż znając kierunki ku niemu z dwóch dowolnych punktów obserwacji oraz „bazę" $AO = R$ można zawsze obliczyć kąt p zwany *paralaksą* obiektu, pod jakim byłoby z niego widać tę bazę. Obliczenie odległości r nie stanowi wtedy żadnego problemu.

Takie wyznaczanie odległości praktykuje się w dwóch wariantach. Pomiary odległości ciał Układu Słonecznego wykonuje się z użyciem ziemskiego promienia jako bazy — kąt p nazywa się wtedy paralaksą dzienną obiektu. Nazywa się tak, ponieważ fikcyjny obserwator ma w zasadzie możliwość zmiany położenia z A do B wskutek dziennego obrotu Ziemi. Odległości gwiazd wyznacza się analogicznie, z tym że bazą jest promień okołosłonecznej orbity Ziemi. Kąt p nazywa się wtedy paralaksą roczną, gdyż obserwator przenosi się z A do B wykorzystując ruch roczny Ziemi.

Wracając do Słońca widzimy wobec tego, że trzeba zaobserwować jego położenie (np. krawędzi czy małej plamy) z dwóch miejsc na Ziemi i tak otrzymać jego paralaksę dzienną, a co za tym idzie odległość. Niestety, przeszkody są następujące:

— paralaksa Słońca, jak się okazało, jest kątem tak małym, że bezpośredni pomiar mógłby być obarczony sporym błędem,

— Słońce nagrzewając atmosferę powoduje takie jej falowanie, że precyzyjny pomiar kąta jest niemożliwy,

— w dzień nie widać tła gwiazd.

Wybrnąć z tej, zdawałoby się, beznadziejnej sytuacji pomogła sama przyroda. Otóż od dawna obserwuje się systematycznie szereg planetoid, tak że ich orbity są znane z wysoką dokładnością. Przez znajomość orbity rozumiemy to, że dla każdego momentu czasu możemy obliczyć odległość planetoidy od Ziemi w jednostkach średniej odległości Ziemi od Słońca. Ta średnia odległość jest zwana jednostką astronomiczną (1 j.a.). Innymi słowy, mechanika nieba zapewnia nam dobrą znajomość **stosunków** odległości planetoidy i Słońca od Ziemi w każdym momencie czasu. Dzięki temu wykonujemy bezpośredni pomiar odległości planetoidy, a nie Słońca. Jest to możliwe i nietrudne, jako że robi się to w nocy, gdy widać gwiazdy i atmosfera jest spokojniejsza, a sama planetoida jest obiektem punktowym, przez co pomiar jest łatwy technicznie. Co więcej, przyroda jeszcze bardziej sprawę ułatwia. Mianowicie jest kilka planetoid, które zbliżają się czasem do Ziemi bardziej niż na 1 j.a., a zatem ich mierzona paralaksa dzienna jest wtedy kątem stosunkowo dużym. W najkorzystniejszej sytuacji bywa Eros (nr katalogowy 433), którego orbita jest niewiele obszerniejsza od ziemskiej (wielka półoś wynosi 1,458 j.a.), zaś mocno wydłużona (mimośród wynosi 0,223). Dzięki temu Eros może się zbliżyć do Ziemi na odległość zaledwie 0,15 j.a. Jego paralaksa dzienna wynosi wtedy ok. 1′, co jest doskonale mierzalne. Znając stosunek odległości Erosa i Słońca w chwili obserwacji i rozmiary Ziemi (R) obliczenie odległości r Słońca w kilometrach jest już fraszką.

Na szeroką skalę zakrojona akcja obserwacyjna odbyła się już w 1931 r., kiedy położenie Erosa na tle gwiazd zaobserwowały 24 obserwatoria. Uzyskane wtedy wyniki niewiele różnią się od uznawanych obecnie. Za paralaksę Słońca przyjmuje się teraz $p = 8''.794 = 4{,}263 \cdot 10^{-5}$ rad. Ponieważ promień (równikowy) Ziemi wynosi $R = 6378$ km, to na odległość średnią Słońca otrzymujemy $r = 149{,}6$ mln km. Jest to jedna z podstawowych stałych astronomicznych.

PROBABILISTYKA W ANALIZIE

W jednym z instytutów PAN w trakcie badań nad teorią masowej obsługi (specjaliści od tej teorii nie lubią, gdy nazywać ich fachowcami od kolejek) pojawiło się zadanie: czemu jest równa granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(nx)^k}{k!}}{e^{nx}}.$$

„Wyskoczyła" ona w dość naturalny sposób w modelu przepływu, w którym uwzględnione są zbiorniki. Jeśli mianowicie strumień np. listów przepływa przez „zbiornik" — pocztę Z, to strumień Y u adresatów ma nieco inne parametry niż „wejściowy" X. Zakładając np. że opóźnienie przesyłki jest proporcjonalne do zasobu listów w drodze, otrzymujemy dość prosto równanie przepływu.

Proporcjonalność opóźnienia przesyłki do wielkości zasobu sugeruje naturalny pomysł: zastąpić „opóźniacz" Z przez kilka niezależnych mniejszych: $Z_1, \ldots Z_n$. Wspomniana granica pojawia się przy badaniu rozkładu granicznego ($n \to \infty$). Nie o tym jednak chcemy napisać, a o tym, jak można obliczyć (i faktycznie tak obliczyliśmy) tę granicę. Metodę rozwiązania problemu podał docent Stanisław Kwapień z Uniwersytetu Warszawskiego.

Przypomnijmy sobie najpierw rozkład Poissona. To taki rozkład, w którym

$$P(X = k) = \frac{a^k e^{-a}}{k!}, \quad a > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Parametr a jest równy wartości oczekiwanej $E(X)$ i równy jest także wariancji $D^2(X)$.

Potrzebne będzie jeszcze **Centralne Twierdzenie Graniczne** Lindeberga-Levy'ego:

jeżeli niezależne zmienne losowe X_i mają ten sam rozkład i $\mu = E(X_i)$, $\sigma^2 = D^2(X_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, to

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

jednostajnie względem $x \in (-\infty, +\infty)$. Prawa strona jest dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 0 i wariancją 1.

Niech teraz $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Poissona z parametrem równym x. Mamy więc $E(X_i) = D^2(X_i) = x$ dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots$. Wprowadźmy zmienne losowe

$$Y_n = X_0 + X_1 + \ldots + X_{n-1}.$$

Mają one też rozkłady Poissona (*suma niezależnych zmiennych losowych o rozkładach Poissona o parametrach a i b ma rozkład Poissona o parametrze $a+b$*), $E(Y_n) = nx = D^2(Y_n)$. Wtedy

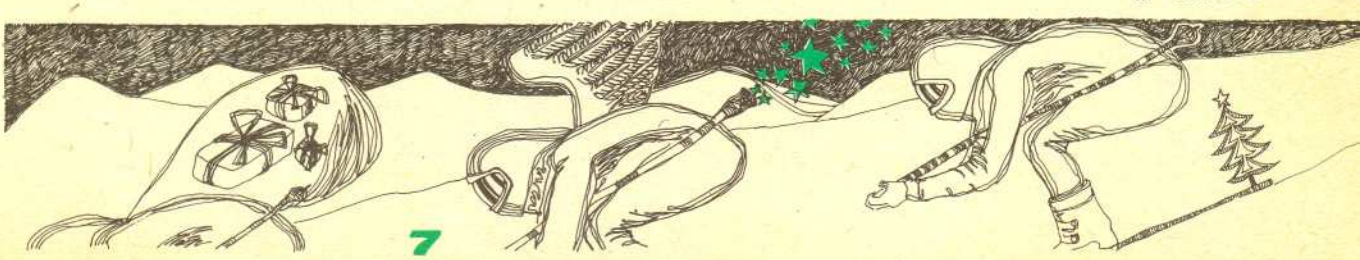
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx} = P(Y_n < n) = P(X_0 + X_1 + \ldots + X_{n-1} < n) =$$

$$= P\left(\frac{X_0 + X_1 + \ldots + X_{n-1} - nx}{\sqrt{nx}} < \frac{n - nx}{\sqrt{nx}}\right) = P\left(\frac{X_0 + X_1 + \ldots + X_{n-1} - nx}{\sqrt{nx}} < \frac{n(1-x)}{\sqrt{nx}}\right).$$

Ponieważ jednak, jak łatwo wyliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(1-x)}{\sqrt{nx}} = \begin{cases} +\infty & \text{dla} \quad x < 1 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 1 \\ -\infty & \text{dla} \quad x > 1, \end{cases}$$

to Centralne Twierdzenie Graniczne daje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(nx)^k}{k!}}{e^{nx}} = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x < 1 \\ 1/2 & \text{gdy} \quad x = 1 \\ 0 & \text{gdy} \quad x > 1. \end{cases}$$

dr Jan GADOMSK