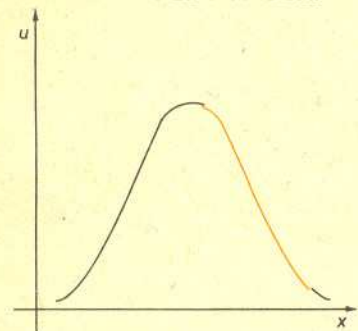


Nieliniowe fale stacjonarne

Dr Stefan
WOJCIECHOWSKI



Rys. 1



Rys. 2

Rozchodzenie się sygnału w ośrodku fizycznym opisywane jest równaniami falowymi. Ich postać istotnie zależy zarówno od własności ośrodka, jak i od energii sygnału. Jak dotychczas poznaliśmy dosyć dobrze własności liniowego równania falowego, czyli takiego, że suma dwóch dowolnych jego rozwiązań jest również rozwiązaniem. Tylko w nielicznych przypadkach natomiast udało się wyznaczyć ewolucję czasową fal nieliniowych.

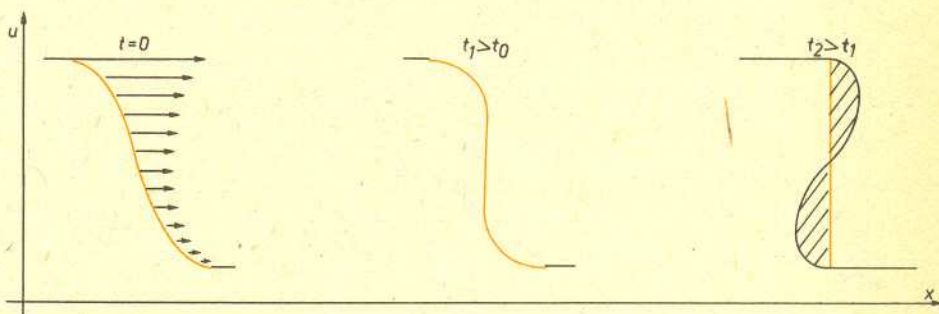
Rozważmy na początek najprostsze równanie falowe

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

gdzie $u(x, t)$ jest amplitudą fali, zaś c prędkością rozchodzenia się sygnału. Jeśli prędkość ta jest stała, to rozwiązaniem równania jest fala stacjonarna $u(x, t) = u_0(x - ct)$ wędrująca z prędkością c w prawo, o profilu zadanym przez warunek początkowy $u(x, 0) = u_0(x)$. Kształt profilu w chwili początkowej możemy obrać w formie np. paczki falowej (rys. 1) albo frontu falowego jak na rysunku 2.

Na ogół prędkość rozchodzenia się sygnału nie jest stała i może zależeć zarówno od położenia oraz czasu, jak i od amplitudy. Jeśli jednak ograniczymy się do stacjonarnego i przestrzennie jednorodnego ośrodka reagującego na zaburzenie nieliniowo, to wtedy c jest tylko funkcją u . W najprostszym przypadku $c(u) = u$, czyli

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$



Rys. 3

Wzrost prędkości z amplitudą powoduje skracanie się czoła fali w wyniku doganiania go przez zaburzenia o dużej amplitudzie (rys. 3). W końcu amplituda staje się niejednoznaczna funkcją położenia i następuje załamanie się jak dla fal na wodzie. W przypadku fali dźwiękowej natomiast oznacza to tworzenie się frontu fali uderzeniowej (patrz artykuł A. Kuszla, *Delta* 10/1981). W opisie takich fal, jak fala dźwiękowa, niejednoznaczność amplitudy usuwa się przez wprowadzenie nieciągłego czoła fali, które umieszcza się w takim położeniu, żeby zakreślane pola po obu stronach nieciągłości były równe. Warunek ten wynika z zasady zachowania energii.

Czy zatem w świecie fal nieliniowych nic nie pozostaje ze statecznej wędrowki niezmiennego profilu falowego? Byłoby tak, gdyby nie fakt, że istnieją dwa efekty, które pominięto w równaniu (2), a mianowicie dyssypacja (czyli rozpraszanie) energii oraz rozplywanie się fal wskutek dyspersji. Każdy z nich wystarczy, żeby skompensować zmianę kształtu fali wywołaną zależnością prędkości od amplitudy. Co więcej, równoważenie się przeciwnych wpływów nieliniowości i dyssypacji (lub dyspersji) umożliwia powstanie fali stacjonarnej. Są to jednak fale o bardzo szczególnych profilach, podczas gdy w przypadku równania (1) każdy początkowy profil rozchodzi się bez zmiany kształtu.

Wynik równowagi efektów nieliniowych i dyssypacji: front falowy Burgersa.

Uwzględnienie rozpraszania energii propagującej się fali wymaga uzupełnienia równania (2) członem $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, co daje tzw. równanie Burgersa

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Prędkość fali jest proporcjonalna do amplitudy, a mały parametr μ mierzy tempo rozpraszania energii. Tak otrzymane równanie opisuje rozchodzenie się fal akustycznych w gazie wzdłuż długiej, cienkiej rury, gdy natężenie fali można przyjąć za stałe na całym przekroju poprzecznym. Dodatkowo trzeba także założyć, że nieduże są prędkości przemieszczania się gazu. Amplituda $u(x, t)$ ma wtedy znaczenie prędkości w punkcie x i chwili t bardzo cienkiej warstwy gazu.



Rozwiązanie zadania M 321

Mamy $S_{ABC} = S_{BHC} + S_{CHA} + S_{AHB}$ i ponieważ $\angle BHC = 180^\circ - \angle A$, $\angle AHC = 180^\circ - \angle B$, $\angle AHB = 180^\circ - \angle C$, więc otrzymujemy

$$\frac{abc}{4R} = \frac{1}{2} yz \sin A + \frac{1}{2} zx \sin B + \frac{1}{2} xy \sin C$$

(R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABC).

$$\text{Równocześnie } \sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R},$$

$$\sin C = \frac{c}{2R} \text{ i wobec tego } \frac{abc}{4R} =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{ayz}{R} + \frac{bzx}{R} + \frac{cxy}{R} \right), \text{ skąd wynika}$$

$$\text{równość } abc = ayz + bzx + cxy.$$

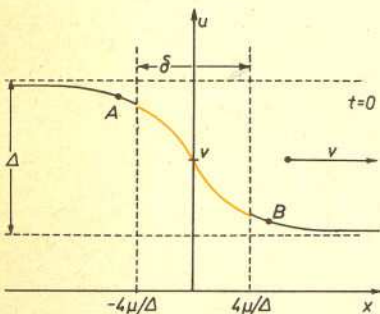


Rozwiązanie zadania M 319

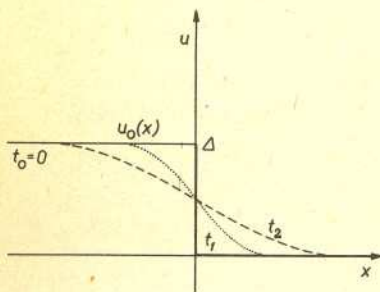
Niech $a_1 = 1, a_2 = 3 + 5, a_3 = 7 + 11 + 13,$ itd. Przez b_1, b_2, b_3, \dots oznaczymy zaś odpowiedniej długości sumy kolejnych liczb parzystych: $2, 4 + 6, 8 + 10 + 12, \dots$. Dla $k > 2$ mamy zatem $a_k \geq b_k$. Ponieważ jednak $b_k = k(k^2 + 1) > k^3$, więc

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a_k}} < \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{b_k}} < \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$$

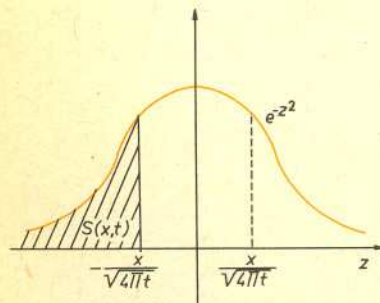
a suma tego ostatniego szeregu nie przekracza 2.



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Żeby zrozumieć wpływ dyssypacji na zachowanie się rozwiązań, poszukamy fali stacjonarnej $u(x, t) = f(x - vt)$. Wstawienie $u(x, t)$ do równania (3) pozwala wyznaczyć następujący front faldy:

$$(4) \quad f(x - vt) = v + \frac{\Delta}{2} \operatorname{th} \left[\frac{\Delta}{4\mu} (vt - x) \right]$$

o kształcie wykresu tangensa hiperbolicznego (rys. 4). Widać zatem, że o ile składnik nieliniowy $u \frac{\partial u}{\partial x}$ powodował skracanie się czoła fali kończące się falą uderzeniową (rys. 3), to człon dyssypacyjny wpływa przeciwnie wymuszając rozplywanie się profilu fali. Efektem równowagi między tymi procesami jest fala stacjonarna (4). Ilościowo wygląda to następująco: Człon dyssypacyjny jest proporcjonalny do $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, a człon nieliniowy rośnie z Δ . Przy

dostatecznie małej szerokości δ frontu faldowego druga pochodna $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ w punktach A i B

wykresu (rys. 4) staje się na tyle duża, żeby oba człony były porównywalne, a efekty ich wpływu wzajemnie się kompensowały. Dlatego szerokość frontu faldowego dana jest zależnością

$$\delta = \frac{8\mu}{\Delta}, \text{ co zapewnia, że zarówno ze wzrostem amplitudy całkowitej } \Delta, \text{ jak i ze zmniejszaniem}$$

się parametru μ druga pochodna $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ osiągnie dostatecznie dużą wartość w punktach A i B.

Natomiast jednolita prędkość v fali stacjonarnej (4) jest wynikiem uśrednienia się ruchu elementów fali o prędkościach zmieniających się w przedziale od $v - \frac{\Delta}{2}$ do $v + \frac{\Delta}{2}$.

Zauważmy, że równanie Burgersa bez członu nieliniowego to również równanie dyfuzji

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

opisujące rozchodzenie się ciepła, którego ogólne rozwiązanie ma postać

$$(6) \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-y)^2}{4\mu t} \right] u_0(y) dy.$$

Na ogół nie potrafimy występującej tu całki obliczyć analitycznie. Z tego względu, dla uproszczenia rozważań przyjmijmy warunek początkowy $u(x, 0) = u_0(x)$ jak na rysunku 5. Jest to uzasadnione, gdyż funkcja $u_0(x)$ bardzo dobrze przybliża kształt fali (4) w chwili $t = 0$ dla dużych Δ , bardzo małych wartości parametru μ oraz $v = \frac{\Delta}{2}$. Rozwiązanie (6) sprowadza się

$$\text{wtedy do całki} \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^0 \exp \left[-\frac{(x-y)^2}{4\mu t} \right] \Delta dy = \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4\mu t}}} \exp(-z^2) dy$$

nietrudnej do zbadania graficznie. Wartość amplitudy jest równa $u(x, t) = \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}} S(x, t)$, gdzie

$S(x, t)$ oznacza zakreskowane pole na rys. 6, a stąd można już łatwo odczytać zmianę frontu faldowego z upływem czasu.

Dotychczasowe rozważania, pomimo że dotyczyły szczególnego rozwiązania, pozwoliły nam zrozumieć rolę poszczególnych składników równania Burgersa. Ale fala stacjonarna (4) ma również charakter uniwersalny: można wykazać, że każde zaburzenie początkowe spełniające

$$\text{warunki} \quad u_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} v + \frac{\Delta}{2} \text{ i } u_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} v - \frac{\Delta}{2}$$

przybiera dla dostatecznie dużych t postać (4), czyli wskutek dyssypacji wszystkie „zmarszczki” zaburzenia początkowego wtapiają się stopniowo w profil wędrującego na prawo tangensa hiperbolicznego.

W świetle uniwersalności rozwiązania (4) zrozumiała staje się również przyczyna wprowadzenia nieciągłego czoła fali na rys. 3. W granicy przy $\mu \rightarrow 0$ równanie Burgersa przechodzi w (2), a rozwiązanie (4) staje się falą w postaci nieciągłego progu o skoku Δ . Próg ten porusza się na prawo z prędkością v . Taka też ustala się (dla dużych t) prędkość nieciągłości na rys. 3.

Wynik równowagi efektów nieliniowych i dyspersji: soliton

Najprostszym rozwiązaniem liniowego równania faldowego (1) jest płaska fala monochromatyczna $u(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ poruszająca się ze stałą prędkością $c = \frac{\omega}{k}$. Każde inne (a ściślej:



Rozwiązanie zadania F 128

Prawidłowym wynikiem jest: $E_2 = \frac{m(v+2u)^2}{2}$

Sprzeczność wynika z pominięcia w układzie laboratoryjnym pola elektrycznego, związanego z poruszającym się polem magnetycznym, którego praca zwiększa energię kinetyczną cząstki.

Gdy cząstka w układzie laboratoryjnym ma prędkość v , wtedy w układzie odniesienia poruszającym się wraz z polem magnetycznym jej prędkość: $v' = v - u$. Siła działająca na cząstkę w tym układzie:

$$F' = q(v' \times B') = qv \times B' - qu \times B'$$

W obrębie pola magnetycznego cząstka porusza się po półokręgu, którego promień jest równy

$$R = \frac{m(v+u)}{|q|B'}$$

Zasada względności wymaga, aby $1^\circ F = F'$ czyli $F = qv \times B' - qu \times B'$, wtedy równania Newtona w obu układach mają taką samą postać.

2° W obu układach cząstka ulegała przesunięciu wzdłuż granicy pola o tę samą odległość $2R$.

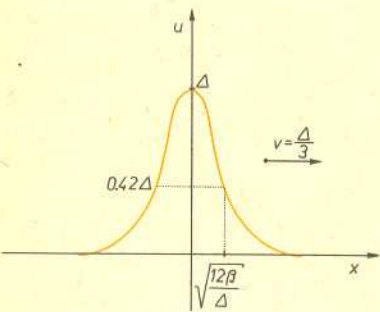
Wzór 1° jest słuszny dla dowolnej wartości v , zatem gdy ładunek pozostaje w spoczynku względem układu laboratoryjnego ($v = 0$), działa nań tylko pole elektryczne, którego natężenie $E = -u \times B'$. Przy prędkościach różnych od zera siła F ma więc postać

$$F = q(v \times B' + E)$$

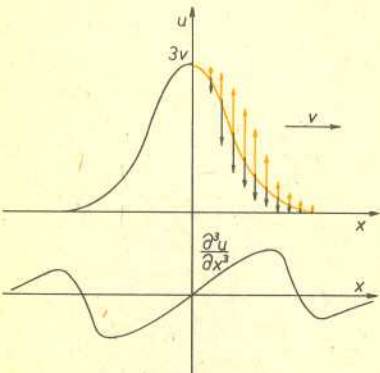
W warunkach zadania pole E jest jednorodne, skierowane równoległe do granicy pola magnetycznego i ma wartość $E = u \cdot B'$. W trakcie przelotu przez obszar pola magnetycznego pole E wykonuje pracę:

$$W = \int qE \cdot v dt = q \int Ev \cos(v, E) dt = |q|E \cdot 2R = 2mu(v+u)$$

Dokładnie tyle samo wynosi różnica energii kinetycznych E_1 i E_2 .



Rys. 7



Rys. 8

każde parzyste w chwili $t = 0$ rozwiązanie można przedstawić w postaci sumy takich fal o różnych częstotliwościach:

$$u(x, t) = \int A(k) \cos(\omega t - kx) dk, \quad \text{gdzie } \frac{\omega(k)}{k} = c(k).$$

Tylko dla fali opisywanej równaniem (1) prędkość jest taka sama dla dowolnego k . Jeśli natomiast rozważymy równanie falowe np.:

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$$

to fala płaska będzie także jego rozwiązaniem, ale pod warunkiem, że $\omega = -\beta k^3$. Odpowiada to zależności prędkości fali $c(k) = -\beta k^2$ od jej długości.

Rozwiązanie dowolnego równania liniowego o tej własności także można przedstawić w postaci sumy fal płaskich, ale poruszających się z różnymi prędkościami. W wyniku tego następuje zmiana kształtu profilu początkowego, co początkowo przejawia się w rozplywaniu się paczki falowej, a następnie w jej rozpadzie na mniejsze pakiety fal oraz ciągi fal sinusoidalnych. Szczegółowe zachowanie się rozwiązań wyznaczone jest przez związek dyspersyjny $\omega = \omega(k)$.

Uwzględnienie efektów słabej dyspersji w równaniu nieliniowym może natomiast prowadzić do formowania się fali stacjonarnej $u(x, t) = f(x - vt)$. Tak się właśnie dzieje, jeśli równanie (2)

uzupełnimy członem dyspersyjnym $\beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, gdzie mały współczynnik β określa szybkość dyspersji;

otrzymamy wtedy tzw. równanie Kortewega — de Vriesa (KdV)

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Opisuje ono rozchodzenie się na płytkiej wodzie długich fal powierzchniowych o małej amplitudzie. Amplituda u jest w tym przypadku wysokością fali ponad powierzchnię swobodną wody.

Postaramy się zrozumieć, jak dyspersja wpływa na formowanie się fal nieliniowych. W tym celu rozpatrzmy falę stacjonarną (rys. 7)

$$(10) \quad u(x, t) = \Delta \frac{1}{\text{ch}^2 \left[\sqrt{\frac{\Delta}{12\beta}} \left(x - \frac{\Delta}{3} t \right) \right]}$$

nazywaną solitonem. Prędkość tej fali wyznaczona jest przez amplitudę $v = \frac{\Delta}{3}$, a szerokość

zależy od ilorazu amplitudy i współczynnika dyspersji, która równoważy tutaj zmiany kształtu fali związane z nieliniowością. Bardzo słaba dyspersja wymaga zatem utworzenia się na tyle

wąskiej paczki falowej, żeby duże wartości $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ uczyniły człon dyspersyjny porównywalnym

z członem nieliniowym $u \frac{\partial u}{\partial x}$.

Dokładniej prześledzimy wpływ dyspersji rozpatrując liniową część równania KdV, czyli równanie (8). Ścisłe rozwiązanie tego równania zawiera trudne do zbadania całki, ale szczęśliwie można się ograniczyć do przeanalizowania tendencji zmian pakietu z rys. 7 w ciągu bardzo krótkiego przedziału czasowego Δt . Jest to uzasadnione, ponieważ profil (10) nie zmienia kształtu, a więc w przeciągu czasu Δt wpływ dyspersji powinien przeciwdziałać efektom nieliniowym.

Rozwiązanie w chwili $t + \Delta t$ można przybliżyć następująco:

$$(11) \quad u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \Delta t + (\text{mała proporcjonalna do } \Delta t^2),$$

a korzystając z równania (8) mamy

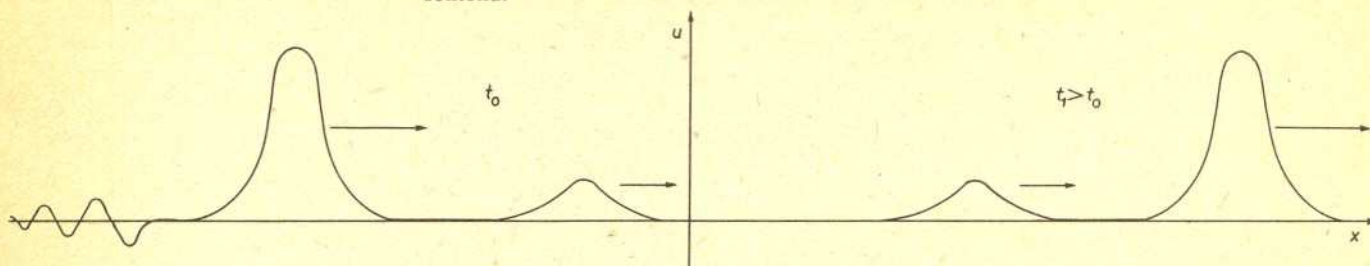
$$(12) \quad u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \left[-\beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, t) \right] \Delta t.$$

Wobec tego prędkość wzrostu amplitudy jest równa $-\beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$.

Zilustrowaliśmy to na rys. 8, gdzie czarne strzałki określające kierunek zmiany amplitudy są proporcjonalne do wartości trzeciej pochodnej $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, t)$. Uwzględnienie nieliniowości wymaga

dorysowania strzałek pomarańczowych o długości proporcjonalnej do $-u \frac{\partial u}{\partial x}$. Na czole fali (zaznaczonym kolorem pomarańczowym), które podlega procesowi nieliniowego skracania się, kierunki strzałek są przeciwne. Wypadkowa prędkość wzrostu amplitudy wycinka wykresu

w punkcie x jest ich sumą i wynosi $-\beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - u \frac{\partial u}{\partial x}$. Jest ona równa prędkości wzrostu wskutek przesuwania się fali, czyli wynosi $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} f(x-vt) = -v \frac{\partial u}{\partial x}$, gdzie v oznacza prędkość solitonu.



Rys. 9

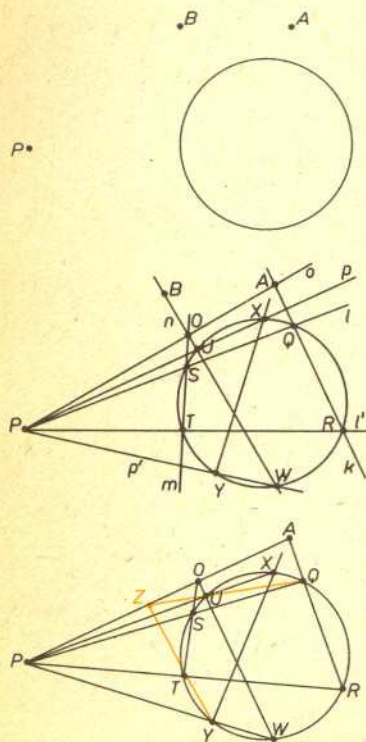
Solitony odgrywają równie uniwersalną rolę w opisie ewolucji czasowej rozwiązań równania KdV, jak fala Burgersa w opisie rozwiązań równania Burgersa. Można wykazać, że dowolne zaburzenie początkowe spełniające warunki $u_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ oraz $u_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ rozpada się (rys. 9) na pewną liczbę solitonów oraz oscylujący ogon, którego amplituda zanika nie wolniej niż $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Po dostatecznie długim czasie pozostają więc tylko solitony poruszające się na prawo ze stałą prędkością proporcjonalną do amplitudy.

W trakcie ewolucji większe solitony doganiają mniejsze, przez moment tworzą z nimi wspólną paczkę falową, a następnie odsuwają się już z prawej strony od solitonu mniejszego. W rezultacie solitony ustawiają się w kolejności wzrastających amplitud. Potem następuje już tylko ich wzajemne oddalanie się od siebie na skutek różnic prędkości.

Rozpatrywane przez nas równania: KdV i Burgersa odgrywają szczególnie ważną rolę w teorii fal nieliniowych. Przyczyna leży w tym, że ściśle równania hydrodynamiki i aerodynamiki są zbyt skomplikowane, żebyśmy mogli znaleźć ich pełne rozwiązania i trzeba się uciekać do metod przybliżonych.

Uwzględnienie najważniejszych poprawek do równania (2) wynikających z dyspersji i dyssypacji na ogół prowadzi do równania KdV lub Burgersa. Inną, niezwykle ważną cechą tych równań jest możliwość wyznaczenia (pomimo nieliniowości) rozwiązań ogólnych, co stwarza możliwość daleko głębszego wniknięcia w naturę fal nieliniowych niż pozwalają na to elementarne rozważania tego artykułu.

Już umiemy



W numerze 1/1982 rozpoczęliśmy serię *Zadań, których nie umiemy rozwiązać* następującym:

Dany jest okrąg i trzy punkty A, B, P . Narysować proste przez A i B wyznaczające na okręgu takie cięciwy UW i XY , żeby proste UX i WY przecinały się w punkcie P .

Istotnie nie umieliśmy rozwiązać tego zadania, a dziś, dzięki naszemu Czytelnikowi, Karolowi Kamińskiemu (uczniowi V klasy TM w Piotrkowie Trybunalskim), już umiemy. Nadesłał nam bowiem następujące rozwiązanie (używał tylko linijki!):

Przez punkt A kreślimy dowolną sieczną k uzyskując punkty Q i R i dalej, jak na rysunku, znajdujemy kolejno proste i punkty $l, l', S, T, m, o, O, n, U, W, p, p', X$ i Y . Rozwiązanie to jest dobre, bardzo za nie dziękujemy.

Pozostaliśmy Czytelnikom dajemy teraz szansę — nie czytajcie dalej, sami wykażcie poprawność rozwiązania.

Sposób dowodu, który tu proponujemy, opiera się na twierdzeniu Pascala należącym do geometrii rzutowej i mówiącym co następuje: Przeciwległe boki sześciokąta wpisanego w stożkową (a więc nie tylko okrąg, ale również elipse, parabolę bądź hiperbolę) przecinają się na jednej prostej.

Ze względu na rzutowość tego twierdzenia (ostatnim razem o geometrii rzutowej pisaliśmy w *Delcie* 5/1982) w przypadku euklidesowym mogą oczywiście mieć miejsce trzy możliwości: pierwsza — opisana w twierdzeniu (jeśli wszystkie punkty przecięcia istnieją), druga — gdy istnieją tylko dwa, prosta przez nie przechodząca jest równoległa do nieprzecinających się przeciwległych boków sześciokąta, trzecia — gdy wszystkie pary boków przeciwległych złożone są z prostych równoległych. Wykorzystamy to twierdzenie do dowodu, że prosta XY przechodzi przez punkt A . W sześciokącie $QSTYWU$ boki przeciwległe przecinają się w punktach P, O , a więc i trzecia para boków przeciwległych musi się przeciąć w punkcie Z leżącym na prostej o . W sześciokącie $XUQRTY$ dwa przecięcia to P i Z , a więc i trzecia para (QR i XY) musi się przeciąć na prostej o , a więc w punkcie A . Konstrukcja p. Karola Kamińskiego jest więc poprawna i rozwiązuje także zadanie dla wszystkich stożkowych. Udowodnienie jego stwierdzenia, że o ile prosta n nie będzie przecinała okręgu w dwóch punktach, to dla takiego okręgu i takich punktów A, B, P rozwiązanie nie istnieje, pozostawiamy Czytelnikom.

