

Jeżeli spojrzymy wstecz na historię matematyki, to dostrzeżemy nieprzerwany ciąg różnorodnych problemów, które zaprzętały umysły matematyków. Czytelnikowi na pewno są znane pasjonujące niegdyś, a dziś już „klasyczne” zagadnienia starożytnych: kwadratura koła, trysekcja kąta, podwojenie sześcianu, problemy Archimedesesa obliczania pól figur zwanych arbelonem (rys. 1), salinonem (rys. 2), czy też zagadnienia późniejszych stuleci, jak na przykład problem postawiony w 1775 roku przez włoskiego matematyka di Fagnano (1682—1776):

W dany trójkąt ostrokątny wpisać trójkąt o możliwie najmniejszym obwodzie. (Rozwiązaniem jest trójkąt zwany ortycznym dla trójkąta wyjściowego — poszukaj w numerze).

Czy w czasach nam bardziej współczesnych nie stawiano podobnych, ciekawych i w zadziwiająco naturalny sposób powstających zagadnień? Otóż sytuacja nie jest tak beznadziejna, jak mogłoby się wydawać na pierwszy rzut oka. Przekonać się o tym możemy śledząc przedstawioną poniżej historię zagadnienia postawionego w 1917 roku przez japońskiego matematyka Sôichi Kakeya. Problem Kakeya: Znaleźć na płaszczyźnie zbiór o najmniejszym polu, w którym można przemieszczać odcinek jednostkowy w ten sposób, by po skończonej liczbie obrotów i przesunięć powrócił on do położenia wyjściowego wykonując przy tym obrót o kąt co najmniej π .

Każdy zbiór, w którym takie przemieszczenie odcinka jest możliwe, będziemy nazywali zbiorem Kakeya.

Zgodnie z zapowiedzią przedstawimy teraz niektóre osiągnięcia matematyków związane z tym problemem w różnych klasach zbiorów. Naturalnym wydaje się rozpoczęcie poszukiwań od klasy zbiorów wypukłych, tzn. takich, w których każde dwa różne punkty zbioru możemy połączyć odcinkiem całkowicie zawartym w tym zbiorze. Może rozwiązaniem będzie tutaj koło o promieniu $\frac{1}{2}$, a polu

$\frac{1}{4} \pi \approx 0,785$? Okazuje się, że nie, bo oto zbiór powstały przez obrót wokół poszczególnych wierzchołków (rys. 3) jednostkowego odcinka o kąt $\frac{1}{3} \pi$ jest

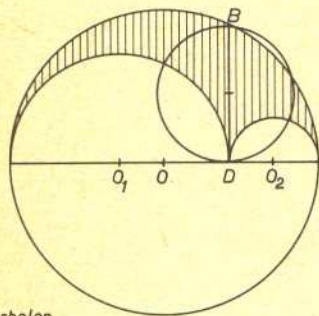
„lepszy” od poprzedniego: pole jego wynosi $\frac{1}{2} (\pi - \sqrt{3}) \approx 0,704$. Definitywne rozwiązanie w klasie zbiorów wypukłych podał w 1921 roku matematyk węgierski J. Pól wykazując, że rozwiązaniem problemu Kakeya jest trójkąt równoboczny o wysokości 1 (rys. 4), którego pole wynosi $1/\sqrt{3} \approx 0,577$ (dowód tego twierdzenia można znaleźć w książce I. M. Jagłom, W. G. Bołtiański — „Figury wypukłe”). Interesujące byłoby sprawdzić, czy prawdziwa jest następująca hipoteza: Minimalny obwód wypukłego zbioru Kakeya wynosi π .

Jeżeli okazałoby się to prawdą, to rozwiązanie tego zagadnienia nie byłoby jednoznaczne — spełnia je zbiór przedstawiony na rys. 3 i okrąg o promieniu $\frac{1}{2}$.

Dość długo przypuszczano, że w klasie wszystkich podzbiorów płaszczyzny rozwiązaniem jest zbiór ograniczony hipocykloidą trójkątną (zwaną także deltoidą), tzn. krzywą jaką zakreśla punkt leżący na okręgu o promieniu $\frac{1}{4}$ toczącym się od wewnątrz po okręgu o promieniu $\frac{3}{4}$ (rys. 5), o polu $\frac{1}{8} \pi \approx 0,392$. I tym razem nie było to ostatnie słowo. W 1928 roku A. S. Besicovitch wykazał, że istnieją na płaszczyźnie zbiory Kakeya o dowolnie małym polu, a tym samym, że w ogólności zagadnienie to nie ma rozwiązania.

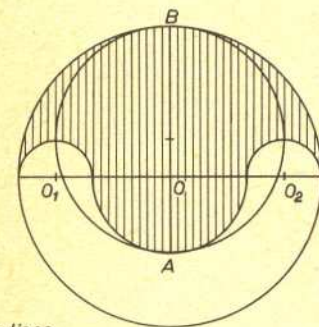
Twierdzenie (A. S. Besicovitch, 1928): Istnieją na płaszczyźnie zbiory Kakeya o dowolnie małym polu.

Dowód: Przeprowadzimy go w dwóch etapach. W pierwszym utworzymy pewien zbiór i pokażemy, że jego pole może być dowolnie małe. W drugim etapie opiszemy jak w otrzymanym zbiorze przemieszczać strzałkę zgodnie z postawionymi warunkami.



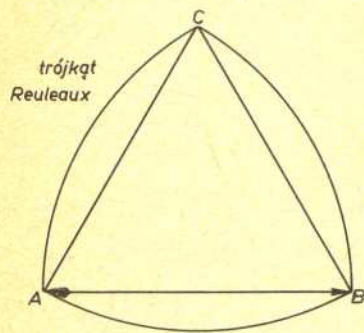
arbelon

Rys. 1



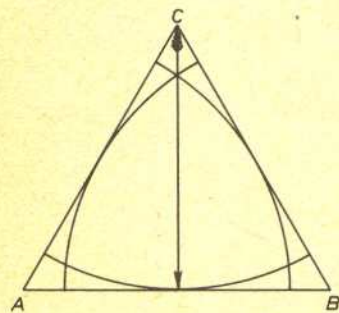
salinon

Rys. 2

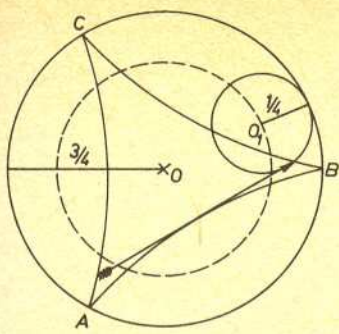


trójkąt Reuleaux

Rys. 3



Rys. 4



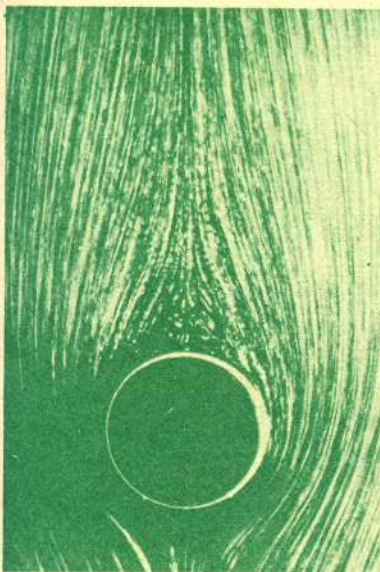
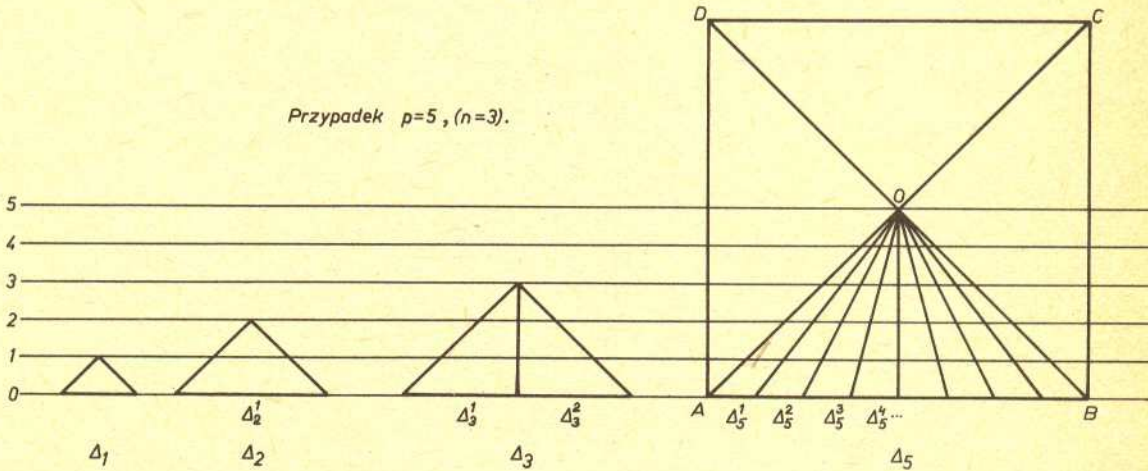
hipocykloida trójkątna

Rys. 5

Rozpatrzmy kwadrat $ABCD$ o boku długości 2. Strzałkę o długości 1 możemy obrócić w tym kwadracie o kąt 2π obracając ją np. wokół punktu przecięcia przekątnych kwadratu. Dzieli one kwadrat na 4 przystające trójkąty prostokątne o wspólnym wierzchołku O . Podzielmy teraz każdy taki trójkąt na 2^n trójkątów tzw. elementarnych, w następujący sposób: przeciwprostokątne (boki kwadratu) dzielimy na 2^n równych części i punkty podziału łączymy z wierzchołkiem O . Otrzymujemy więc $4 \cdot 2^n$ trójkątów elementarnych o wysokości równej 1. Jeżeli te trójkąty poprzesuujemy równoległe wzdłuż odpowiednich boków kwadratu tak, by częściowo pokrywały się, to otrzymamy figurę o polu mniejszym niż pole całego kwadratu. Jest to oczywiste!

Przedstawimy teraz zbiór skonstruowany przez A. Besicovitcha i O. Perrona w 1928 roku, ulepszony w 1962 roku przez H. Rademachera i I. Schoenberga. Niech p będzie dowolną liczbą naturalną nie mniejszą niż 2, i niech $n = p - 2$. Wobec tego trójkąt ABO składa się z 2^{p-2} trójkątów elementarnych. Przesuniemy je w sposób opisany niżej. Na początek środkową trójkąta ABO wyprowadzoną z punktu O o długości 1 podzielmy na p równych części. Przez punkty podziału i krańce środkowej poprowadźmy proste równoległe do boku AB (rys. 6).

Rys. 6



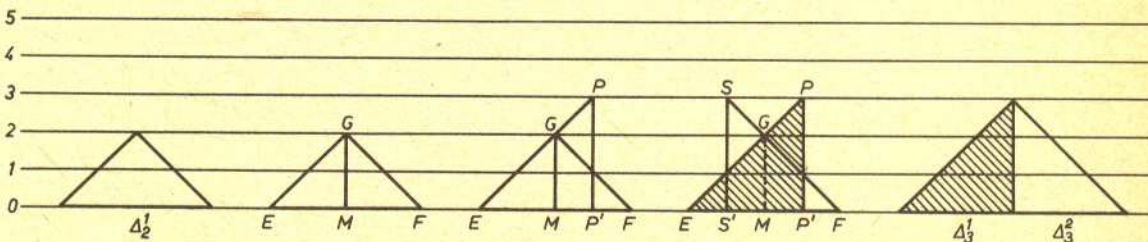
Oznaczmy je numerami $0, 1, 2, \dots, p$ zaczynając od boku AB i idąc w górę do wierzchołka O . Utwórzmy teraz p równoramiennych, prostokątnych trójkątów $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p$, każdy z przeciwprostokątną na prostej o numerze 0 i przeciwnym wierzchołkiem na odpowiednich prostych $1, 2, \dots, p$. Zauważmy, że Δ_p jest równy trójkątowi ABO .

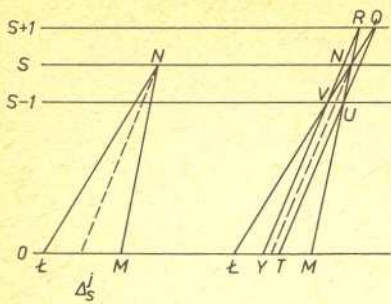
Dalej, dla każdego $s = 2, 3, \dots, p$ podzielmy przeciwprostokątne Δ_s na 2^{s-2} równych części, a punkty podziału połączmy z wierzchołkiem leżącym na prostej s . Otrzymujemy w ten sposób 2^{s-2} trójkątów elementarnych w trójkącie Δ_s ; oznaczmy je przez Δ_s^j , gdzie $s = 2, 3, \dots, p, j = 1, 2, \dots, 2^{s-2}$. Trójkąt Δ_2 nie jest podzielony, możemy jednak przyjąć, że składa się on z jednego trójkąta $\Delta_2^1 = \Delta_2$.

Trójkąta Δ_1 nie bierzemy na razie pod uwagę.

Przedstawimy pewną operację, którą będziemy nazywali „przepełnianiem i rozszerzaniem”, w skrócie $p-r$. Rezultatem tej operacji na dwóch sąsiednich trójkątach elementarnych z klasy $\Delta_i, i = 2, 3, \dots, p-1$ jest para trójkątów zachodzących na siebie, przystających do odpowiednich trójkątów z klasy Δ_{i+1} . W najprostszym przypadku, czyli dla trójkąta Δ_2 operacja $p-r$ jest pokazana na rys. 7: dzielimy trójkąt EFG środkową GM na dwa trójkąty EMG i MFG .

Rys. 7





Rys. 8

Następnie odcinki EG i FG przedłużamy do prostej 3 i z punktów przecięcia prowadzimy odcinki PP' i SS' równoległe do środkowej GM . Otrzymaliśmy w ten sposób dwa zachodzące na siebie trójkąty klasy Δ_3 .

Konstrukcja p—r dla dowolnego trójkąta LMN (rys. 8) jest następująca: boki LN i MN przedłużamy do prostej $s+1$, a punkt R łączymy z punktem przecięcia boku LN z prostą $s-1$ oznaczonym przez V .

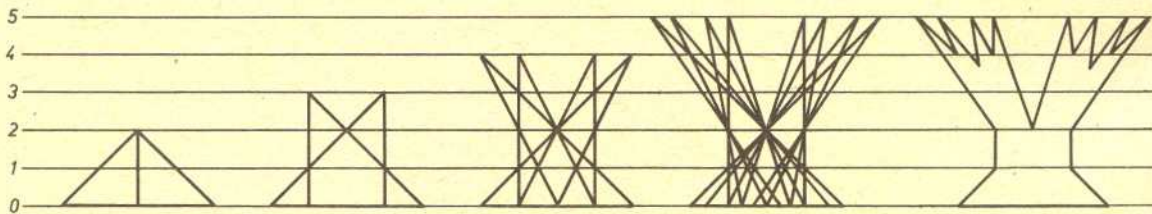
Wyliczmy teraz jak zmienia się pole trójkąta przy operacji p—r. Nazwijmy część trójkąta Δ_s , $s = 2, 3, \dots, p-1$ leżącą między prostymi s i $s-1$ *krańcem* trójkąta Δ_s . Będziemy go oznaczać symbolem $k(\Delta_s)$. Jak łatwo zauważyć dla $s = 2, 3, \dots, p$ $k(\Delta_s)$ jest przystający do trójkąta Δ_1 . Tak więc suma pól krańców $k(\Delta_s^j)$ przy ustalonym s i $j = 1, 2, \dots, 2^{s-2}$ jest równa polu trójkąta Δ_1 . Obliczymy teraz przyrost pola przy wykonywaniu operacji p—r na trójkącie Δ_s^j (patrz rys. 8). W wyniku operacji p—r otrzymujemy dwa przesunięte równoległe trójkąty elementarne LQT i YMR z klasy Δ_{s+1} . Trójkąty LQT i YMR pokrywają trójkąt LMN i dwa trójkąty RVN i NUQ . Mamy

$$|RVN| = |NUQ| = |VUN|,$$

a co za tym idzie przyrost pola powierzchni wynosi $2 \cdot k(\Delta_s^j)$. Ponieważ

$\sum_{j=1}^{2^{s-2}} |k(\Delta_s^j)| = |\Delta_1|$, więc całkowity przyrost pola przy przejściu od trójkątów elementarnych klasy Δ_s do trójkątów elementarnych klasy Δ_{s+1} jest równy co najwyżej $2 \cdot |\Delta_1|$. Operację p—r stosujemy kolejno do wszystkich trójkątów elementarnych Δ_s^j , $s = 2, 3, \dots, p-1$, $j = 1, 2, \dots, 2^{s-2}$. Otrzymujemy w ten sposób wszystkie trójkąty elementarne trójkąta ABO równoległe przesunięte (tzw. drzewo Perrona), co obrazuje rysunek 9. Zaczynając od Δ_2 dochodzimy po $p-2$ krokach do równoległego przesunięcia wszystkich trójkątów elementarnych powstałych z trójkąta Δ_p ; przyrost pola w jednym kroku jest nie większy niż $2 \cdot |\Delta_1|$, a więc pole końcowej figury nie przekracza wartości

$$|\Delta_2| + (p-2) \cdot 2 \cdot |\Delta_1| = \frac{4}{p^2} + 2(p-2) \frac{1}{p^2} = \frac{2}{p}.$$



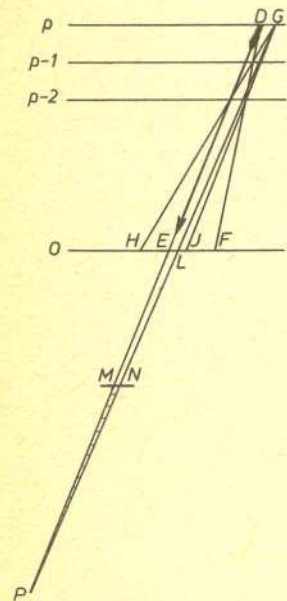
Rys. 9

Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą, a p — liczbą naturalną większą niż $\frac{16}{\varepsilon}$. Wtedy pole figury otrzymanej w wyniku przesunięć równoległych

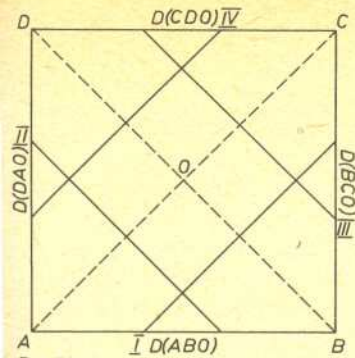
trójkątów elementarnych jest mniejsze niż $\frac{\varepsilon}{8}$. Postępując analogicznie w trzech pozostałych trójkątach kwadratu stwierdzamy, że pole pokryte przez $4 \cdot 2^n$ trójkątów (gdzie $n = p-2$) jest mniejsze niż $\frac{\varepsilon}{2}$.

No dobrze, powie Czytelnik, w każdym takim trójkącie elementarnym otrzymanym w wyniku podziału trójkąta ABO możemy umieścić strzałkę, ale jak w takich poprzesuwanych trójkątach przemieszczać strzałkę zgodnie z zadaniem? Obecnie jest to jeszcze niemożliwe. Zatem do tego zbioru musimy dołączyć inny, który nam taką operację umożliwi. Zbiór ten złożony jest co najwyżej z $4 \cdot 2^{p-2}$ tzw. „łączy”. Niech DEF i GHI będą parą kolejnych trójkątów elementarnych po przesunięciu, jak na rysunku 10. Figurę złożoną z odcinków GP i PD oraz trójkąta PMN nazywamy łączem. Przejście strzałki z trójkąta DEF do trójkąta GHI polega na przesunięciu jej wzdłuż odcinka DP do punktu P , następnie obróceniu jej w trójkącie PMN i przesunięciu wzdłuż odcinka PG , aż początkowy punkt strzałki dojdzie do punktu G . W taki oto sposób strzałka znalazła się w trójkącie GHI . Oszacujemy teraz pole tak uzyskanego łączu. Boki DE i GJ są równoległe.

Oznaczmy przez L taki punkt leżący na odcinku HJ , że $\frac{LJ}{HJ} < \frac{\varepsilon}{8}$. Punkty M i N



Rys. 10



Rys. 11

obieramy w taki sposób, by trójkąt PMN był przystający do trójkąta GLJ (zauważmy, że nie jest to sprzeczne z zaprezentowanym opisem łącza). Korzystając z założenia o punkcie L oraz przystawiania trójkątów GLJ i PMN mamy:

$$|PMN| = |GLJ| < \frac{\varepsilon}{8} |GHJ|. \text{ Ponieważ pole jednego trójkąta elementarnego wynosi}$$

$$\frac{1}{2^{p-2}}, \text{ zatem pole jednego łącza jest mniejsze niż } \frac{\varepsilon}{8 \cdot 2^{p-2}}. \text{ Biorąc pod uwagę}$$

liczbę łączy wnosimy, że całkowite ich pole jest mniejsze niż $\frac{\varepsilon}{2}$. Wobec tego pole tak uzyskanego zbioru jest mniejsze niż zadana z góry liczba ε .

Przystąpmy teraz do drugiego etapu. Naskicujemy w jaki sposób w utworzonym zbiorze (cztery drzewa Perrona i zbiór łączy) przemieszczać strzałkę. Zauważmy, że drzewo Perrona utworzone z trójkątów elementarnych trójkąta ABO , co oznaczać będziemy $\mathcal{D}(ABO)$ (rys. 11), zawiera przesunięty równolegle odcinek AO (część odcinka I), natomiast $\mathcal{D}(BCO)$ zawiera przesunięty równolegle odcinek CO (część odcinka I) i odcinki te (AO i CO) po równoległym przesunięciu w sumie dają odcinek I. Podobnie jest i w pozostałych przypadkach:

$\mathcal{D}(BCO) \cup \mathcal{D}(CDO)$ zawiera przesunięte równoległe odcinki BO i DO , które w sumie dają odcinek III;

$\mathcal{D}(CDO) \cup \mathcal{D}(DAO)$ zawiera przesunięte równoległe odcinki CO i AO , które w sumie dają odcinek IV;

$\mathcal{D}(DAO) \cup \mathcal{D}(ABO)$ zawiera przesunięte równoległe odcinki DO i BO , które w sumie dają odcinek II.

Przypuśćmy teraz, że strzałka znajduje się w $\mathcal{D}(ABO)$ na odcinku I. Wzdłuż I przesuwamy strzałkę do $\mathcal{D}(BCO)$. Następnie w zbiorze tym przy pomocy łączy przemieszczamy strzałkę do położenia na odcinku III. Wzdłuż tego odcinka przesuwamy strzałkę do $\mathcal{D}(CDO)$ i przemieszczamy ją przy pomocy łączy do położenia na odcinku IV. Procedurę taką powtarzamy do momentu, aż strzałka powróci do położenia wyjściowego. Wobec tego tak otrzymany zbiór jest zbiorem Kakeya i jego pole może być dowolnie małe. Zauważmy, że im mniejsze jest pole zbioru Kakeya w twierdzeniu Besicovitcha, tym jego średnica jest większa.

W związku z tym zaczęto poszukiwać zbioru Kakeya o dowolnie małym polu, lecz mniejszej średnicy. W 1941 roku I. H. van Alphen wykazał, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki zbiór zawarty w kole o średnicy $4 + \varepsilon$.

Przejdziemy teraz do kolejnej klasy zbiorów — zbiorów jednospójnych. Wcześniej wyjaśnimy, co kryje się pod tą nazwą. Do tego potrzebne nam będzie pojęcie spójności, które wyjaśnia zdanie: „Twór geometryczny jest spójny, gdy składa się z jednego kawałka, czyli gdy nie można go podzielić na dwa kawałki, które nie stykałyby się bezpośrednio” (patrz *Delta* 1/1979). Teraz „jasna” staje się następująca

Definicja: Podzbiór płaszczyzny nazywamy jednospójnym, jeżeli jest zbiorem spójnym i jego dopełnienie również jest zbiorem spójnym.

Dla jednospójnych zbiorów Kakeya pierwsi podali oszacowanie (niezależnie od siebie) w 1965 roku M. Bloom i I. Schoenberg. Sądziłi oni, że najmniejszy spójny i jednospójny zbiór Kakeya ma pole równe $\frac{\pi}{24} (5 - 3\sqrt{2}) \approx 0,099$. Pogląd ten obalił w 1971 roku F. Cunningham wykazując

Twierdzenie: Istnieje jednospójny zbiór Kakeya o dowolnie małym polu zawarty w kole o promieniu 1.

Inną klasą zbiorów, wśród których również można marzyć o rozwiązaniu problemu Kakeya, jest klasa zbiorów gwiazdzistych. Otóż właśnie w klasie zbiorów gwiazdzistych problem Kakeya do tej pory nie został całkowicie rozwiązany. F. Cunningham dowiódł tylko w 1974 r. pewnego oszacowania, a mianowicie:

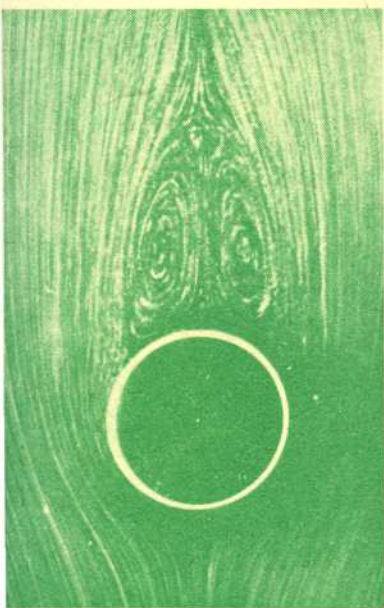
Każdy zbiór gwiazdzisty Kakeya ma pole równe co najmniej $\frac{\pi}{108}$.

Uważając, że wszczęcie poszukiwań ostatecznego rozwiązania problemu Kakeya w klasie zbiorów gwiazdzistych będzie bardziej fascynujące niż czytanie dowodu, kończę i życzę przyjemnej zabawy.

W dowodzie obok pokazaliśmy, że dany prostokątny, równoramienny trójkąt ABO można tak podzielić na 2^n trójkątów elementarnych, by po ich równoległym przesunięciu do AB pokryte przez nie pole było dowolnie małe.

Proponujemy Czytelnikom jako zadanie na podobnej drodze wykazać ogólniejszy fakt.

Twierdzenie Fischera: Niech dany będzie trójkąt ABC o polu P i liczba $\varepsilon > 0$. Wówczas trójkąt można tak podzielić odcinkami CA_j , $j = 0, 1, \dots, n$, $A_1 \in AB$, $A = A_0$, $B = A_n$ na trójkąty CA_jA_{j+1} , $j = 0, 1, \dots, n-1$, by po ich odpowiednim przesunięciu równoległym do AB pokrywały pole nie większe niż ε .



Definicja: Zbiór nazywamy gwiazdzistym względem danego punktu O , gdy każdy punkt tego zbioru da się połączyć z punktem O odcinkiem całkowicie zawartym w tym zbiorze.