

Zagadki hydrodynamiki i turbulencja

Doc. dr Zbigniew PERADZYŃSKI

Paradoks Du Buata

W latach siedemdziesiątych osiemnastego stulecia rząd francuski wyznaczył nagrodę za rozwiązanie problemu oporu statków w zależności od ich kształtu, co zintensyfikowało zarówno teoretyczne, jak i doświadczalne badania w dziedzinie hydrodynamiki. Spośród rozmaitych prac eksperymentalnych najbardziej przełomowe okazały się prace inżyniera hydrauliki Pierre Du Buata (1734—1809). Badając opór ciał poruszających się w wodzie Du Buat zauważył, że występuje dość wyraźna różnica w sile oporu w zależności od tego, czy będące w spoczynku ciało jest opływane strumieniem wody o pewnej prędkości v , czy też ciało to porusza się z prędkością v w nieruchomej wodzie. Sytuacja wygląda paradoksalnie, bowiem wydaje się przeczyć zasadzie względności Galileusza — fundamentalnej zasadzie fizyki. Pomimo usiłowań w tym kierunku Du Buat nie był w stanie wyjaśnić przyczyny tego paradoksu.

Problem siły wywieranej na ciało przez przepływający płyn jest podstawowym zagadnieniem hydrodynamiki, wiąże się bowiem bezpośrednio z problemem lotu samolotu, pracy śmigła, śruby okrętowej, turbin itp. Już Newton (1643—1727) atakował ten problem i rozważając ciało bombardowane przez swobodne cząstki doszedł do wzoru

$$F = \rho A v^2,$$

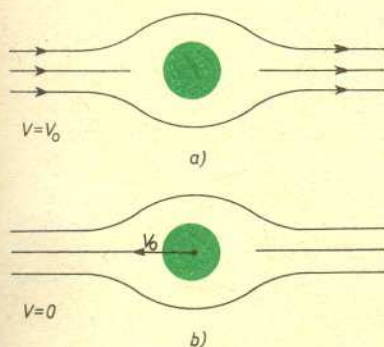
gdzie ρ jest gęstością, v — prędkością cieczy daleko od ciała, A — stałą proporcjonalną do przekroju poprzecznego ciała (np. dla płytki umieszczonej prostopadle do przepływu $A = 2 \times$ pole płytki, dla kuli $A = \pi r^2$).

Niestety, wzór ten może być słuszny jedynie dla niezwykle rozrzedzonych gazów i pozostaje w dużej niezgodności z eksperymentem. Dla realnych gęstych cieczy czy gazów cząstki płynu nie odskakują od ciała, lecz łagodnie je opływają. Według teorii Newtona tylko frontowa (w stosunku do napływającego płynu) strona byłaby odpowiedzialna za siłę wywieraną na ciało, podczas gdy eksperymenty Du Buata wykazały, że w wielu przypadkach właśnie tylna część ciała odgrywa decydującą rolę!

Paradoks d'Alemberta — czy lepsza teoria może dawać gorsze rezultaty

Początek dynamiki płynów jako teorii matematycznej można umieścić około roku 1750, kiedy to znakomity matematyk szwajcarski Leonhard Euler podał słynne równania (nazwane później jego imieniem) ruchu cieczy nielepkiej, tzn. takiej, w której siły działające na wybrany element cieczy pochodzą jedynie od ciśnienia. Jest to uogólnienie faktu (prawo Pascala), że ciśnienie w hydrostatyce jest izotropowe, tzn. jednakowe we wszystkich kierunkach. Ciecz silnie reaguje na zmianę objętości i niezauważalnie na zmianę kształtu!

Spośród wielu możliwych przepływów opisywanych tymi równaniami najważniejsze wydawały się przepływy potencjalne, a więc takie, dla których istnieje potencjał prędkości, tj. taka funkcja φ , że prędkość \mathbf{v} jest jej gradientem ($\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$), podobnie jak w elektrostatyce pole elektryczne jest gradientem potencjału. Rozciągając tę analogię, umieszczenie w przepływie ciała nieprzenikalnego dla cieczy odpowiada umieszczeniu w polu elektrycznym ciała o tym samym kształcie i zerowej stałej dielektrycznej. Przepływy potencjalne są przepływami bezwirowymi, tzn. takimi, że drobne elementy płynu, jakkolwiek mogą się poruszać po zakrzywionych torach i mogą być deformowane, to jednak nie ulegają obrotom. Dla cieczy opisywanej równaniami Eulera zachodzi twierdzenie (Thomsona), które mówi, że jeśli przepływ był na początku potencjalny, wówczas już na zawsze pozostanie potencjalny.

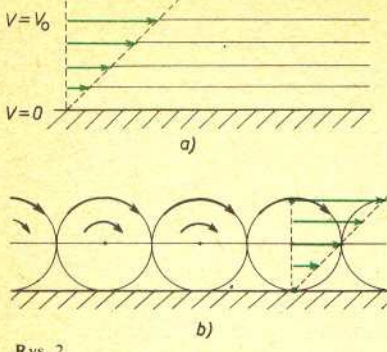


Rys. 1 Doświadczenie pokazuje, że siła, z jaką płyn działa na ciało, jest w przypadku a) inna niż w przypadku b).

Gradient różniczkowalnej funkcji rzeczywistej $f(x_1, \dots, x_n)$ w punkcie (x_1, \dots, x_n) to wektor:

$$\text{grad } f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right].$$

Pole skalarne określone funkcją f (punktowi przyporządkowana liczba) generuje tu więc pole wektorowe $\text{grad } f$ (punktowi przyporządkowany wektor charakteryzujący co do wielkości i kierunku — największą prędkość wzrostu f).



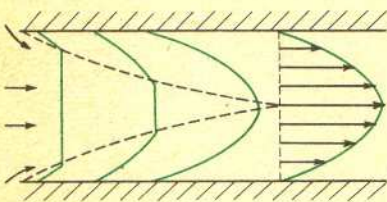
Rys. 2

Niezerową siłę oporu uzyskał Helmholtz (1821—1894) zakładając, że za ciałem rozciąga się do nieskończoności strefa cienia z zerową prędkością płynu. Ale takie przepływy nie są potencjalne i ponadto prędkość doznaje skoku na powierzchni cienia.

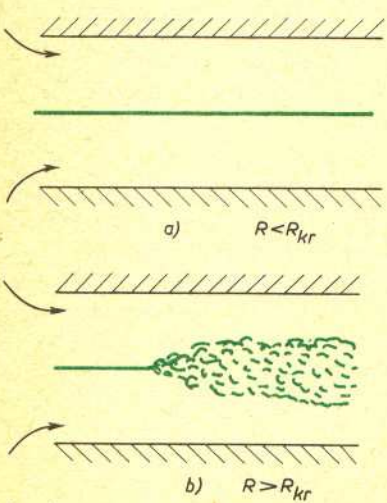
Pomiędzy dwiema bliskimi równoległymi warstwami cieczy oddalonymi o Δl , gdzie jedna ślizga się względem drugiej z prędkością Δv występuje siła tarcia

$$F_t = \eta \frac{\Delta v}{\Delta l},$$

gdzie Δl — odległość, a $\eta > 0$ jest stałą materiałową zwaną współczynnikiem lepkości.



Rys. 3 Płaski (potencjalny) profil prędkości w rurze ewoluuje do parabolicznego na skutek wzrostu grubości warstwy przyściennej.



Rys. 4

Mogłoby się wydawać, że mając równania opisujące ruch płynu można będzie analizując ich rozwiązania wyznaczyć siły działające na opływane ciało. Jeśli ciało zaczyna się poruszać osiągając pewną stałą prędkość w spoczywającym początkowo płynie, wówczas zgodnie z twierdzeniem Thomsona powinniśmy mieć do czynienia z opływem potencjalnym (bo spoczynek jest szczególnym przypadkiem przepływu potencjalnego). Analizując jednakże stacjonarne potencjalne przepływy d'Alembert (1717—1783) zauważył, że jeśli prędkość $v(x, y, z)$ i ciśnienie $p(x, y, z)$ jest rozwiązaniem równań Eulera, to również $-v(x, y, z)$, $p(x, y, z)$ jest rozwiązaniem tego samego problemu. Ponieważ siła wywierana na ciało w modelu Eulera pochodzi tylko od ciśnienia, to zmiana znaku prędkości nie powoduje zmiany siły! Jeżeli ponadto przepływ daleko za ciałem jest taki sam jak daleko przed ciałem (a taka sytuacja ma miejsce dla przepływów potencjalnych), wówczas siła działająca na ciało może być tylko prostopadła do kierunku przepływu, a dla ciała symetrycznego, np. kuli, musi być równa zero! Oczywisty absurd znany jako paradoks d'Alemberta. Można pokazać, że w przepływie potencjalnym, w przypadku dowolnego ciała, siła jest zerem. W tej sytuacji nawet Euler analizując opór statków, pracę turbin czy śrub okrętowych korzystał z niepoprawnych wzorów Newtona, a paradoks oporu mimo licznych prób pozostawał nierozwiązany. Wzory Newtona jeszcze w końcu XIX wieku były wykorzystywane do wykazania praktycznej niemożliwości zbudowania latających maszyn ze względu na olbrzymi opór.

Wytworzyła się więc paradoksalna sytuacja: wzór Newtona, choć oparty na złych założeniach, dawał lepsze wyniki aniżeli elegancka i matematycznie spójna teoria Eulera. Stawało się powoli jasne, że nieuwzględnienie wewnętrznego tarcia w cieczy może być odpowiedzialne za paradoks d'Alemberta. W 1821 r. Claude L. M. H. Navier zmodyfikował równania Eulera uwzględniając siły lepkości (tarcia wewnętrznego) proporcjonalne do gradientu prędkości. Nieco później do tego samego rezultatu doszedł fizyk i matematyk angielski George G. Stokes.

Dość zabawny jest fakt, że potencjalne rozwiązania równań Eulera spełniają również równania Naviera-Stokesa, a zatem różnica pojawia się tylko wtedy, kiedy wystąpi siła tarcia między powierzchnią ciała i opływającą je cieczą. Istotnie, eksperymenty pokazują, że ciecz bezpośrednio przylegająca do ciała ma prędkość zerową i prędkość ta narasta w pewnej cienkiej początkowo warstwie wokół ciała do typowych prędkości w przepływie. A zatem w pobliżu brzegu opływanego ciała pojawia się wirowość, przepływ przestaje być tam potencjalny. Istotnie, przepływ na rys. 2a można uważać za superpozycję dużej ilości wirów toczących się po powierzchni ciała (rys. 2b).

Z drugiej strony równanie opisujące ewolucję wirowości, będące konsekwencją równania Naviera-Stokesa, jest równaniem typu równania dyfuzji, co powoduje, że wiry generowane początkowo w cienkiej warstwie przy brzegu dyfundują dalej do obszaru, gdzie przepływ był poprzednio potencjalny. W ten sposób grubość warstwy wirowej zwanej warstwą przyściennej rośnie z pierwiastkiem odległości od przedniej krawędzi opływanego ciała. Grubość warstwy przyściennej maleje wraz ze wzrostem tzw. liczby Reynoldsa, $R = \rho \frac{vL}{\eta}$, gdzie ρ — gęstość cieczy, v — średnia typowa prędkość, a L jest typowym rozmiarem, np. średnicą rury w przepływie przez rurę lub średnicą kuli przy opływie kuli.

Paradoks symetrii — niestabilność i turbulencja

Wyobraźmy sobie następujące doświadczenie przeprowadzone przez Reynoldsa: do rury (rys. 4) wpływa woda z dużego zbiornika. W środku przekroju rury wpuszczony jest barwnik, np. atrament, który płynie razem z cieczą. Przy niezbyt dużych prędkościach przepływu obserwujemy równomierną stróżkę barwnika jak na rys. 4a. Po przekroczeniu pewnej krytycznej prędkości obraz przepływu nagle się komplikuje, staje się bardzo chaotyczny, jak mówimy — turbulentny. Tak więc mimo symetrycznych, jak się wydaje, przyczyn i symetrii praw przyrody skutek jest wysoce niesymetryczny. Wyjaśnienie tego „paradoksu” opiera się na pojęciu niestabilności. Symetryczny przepływ staje się niestabilny po przekroczeniu krytycznej liczby Reynoldsa, w przypadku rury $R_{kr} \approx 2300$.

Rys. 5 Niestabilność dymu z papierosa



Przepływ wody ($\eta \approx 10^{-2} \text{ gcm}^{-1}\text{s}^{-1}$) w rurze o średnicy $L = 2 \text{ cm}$ jest turbulentny już dla prędkości powyżej ok. $10 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

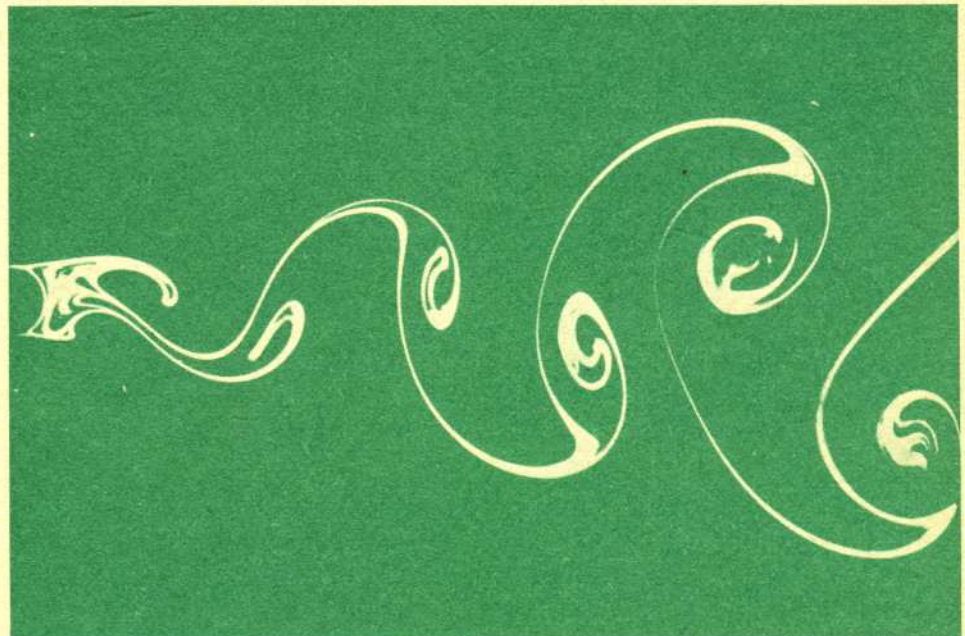
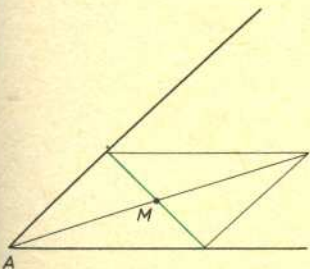
Pojawienie się turbulencji wyjaśnia do pewnego stopnia paradoks Du Buata. Mianowicie w praktyce prawie każdy strumień jest nieco turbulentny. Przepływ wody w rzece jest bardziej burzliwy niż opływ przedmiotu poruszającego się w spokojnej wodzie jeziora, co daje różnice w oporze i pozwala nadal wierzyć w zasadę względności. Zamiast paradoksu względności pojawia się jednakże problem opisu turbulencji.

Liczba Reynoldsa ma duże znaczenie w hydrodynamice. Wyraża stosunek sił bezwładności do sił tarcia wewnętrznych w przepływie. Dwa przepływy (w ogólności różnych) cieczy w sytuacji geometrycznie podobnej wyglądają tak samo, jeśli mają tę samą liczbę Reynoldsa. Dla przykładu przepływ miodu (duże η) w jakimś naczyniu można wymodelować przepływem wody ($\eta \approx 10^{-2} \text{ gcm}^{-1}\text{s}^{-1}$) biorąc np. odpowiednio mniejsze wymiary naczynia czy też mniejszą prędkość wody.

Rys. 6 Ścieżka wirów za walcem (po lewej stronie fotografii) przy $R = 140$



Rozwiązanie zadania M 334.



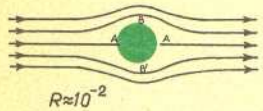
Pojawienie się warstwy przyściennej wyjaśnia do pewnego stopnia paradoks d'Alemberta. Na skutek istnienia warstwy przyściennej przepływ przestaje być potencjalny i w ogólności za ciałem pojawia się pewna ścieżka wirów. Fakt ten ma miejsce nawet jeśli z lepkością przechodzić do zera, co odpowiada przejściu od równań Naviera-Stokesa do równań Eulera. W tym przypadku ścieżka wirowa staje się nieskończenie cienka i w konsekwencji daje nieciągłość prędkości bądź też wystąpienie pewnego wiru dookoła opływającego ciała (patrz artykuł W. Kuzaka, *Delta* 4/1982). Otrzymujemy niezerową siłę!

Rozumowanie to jest przybliżone, ponieważ równanie Bernoulliego jest konsekwencją równań Eulera, a nie równań Naviera-Stokesa.

Rozpatrzmy potencjalny opływ walca potokiem cieczy idealnej bez lepkości napływającym z lewa z prędkością v_0 (rys. 7). Zgodnie z prawem Bernoulli'ego

$$\rho \frac{v^2}{2} + p = \text{const}, \text{ a więc w punktach } A, A', \text{ gdzie ciecz ma prędkość } v = 0,$$

ciśnienie jest maksymalne, natomiast w punktach B, B' prędkość osiąga maksimum, po czym opływając walec ciecz jest hamowana, co prowadzi do wzrostu ciśnienia kosztem energii kinetycznej. Dla cieczy, w której występuje tarcie, sytuacja taka jest niemożliwa, część energii kinetycznej ulega dyssypacji, wskutek czego linie prądu bliskie powierzchni walca nie są już w stanie dotrzeć do punktu A' i wcześniej następuje tzw. oderwanie warstwy przyściennej (rys. 8), co prowadzi do pojawienia się wirów w okolicy punktu A' . Dalszy wzrost liczby Reynoldsa prowadzi do dalszych komplikacji przepływu, dopiero co utworzone wiry zaczynają być kolejno wymywane (rys. 9), aż wreszcie dla dostatecznie dużych liczb Reynoldsa przepływ za walcem staje się turbulentny (rys. 10). Jaki jest mechanizm powstawania turbulencji? W warstwie przyściennej generowana jest wirowość. Na skutek odrywania się warstwy przyściennej powstają duże wiry o wymiarach porównywalnych z rozmiarami charakterystycznymi występującymi w przepływie, jak średnica rury czy też promień walca. Wiry te oddziałują z przepływem, są rozciągane i rozrywane, co prowadzi do powstawania mniejszych wirów. Te z kolei są przyczyną powstawania jeszcze mniejszych itd. Kaskadowy mechanizm napędzania coraz to mniejszych wirów powoduje powstawanie bardzo małych wirów, których energia wskutek lepkości jest szybko zamieniana na ciepło. Wszystko to razem powoduje, że struktura przepływu jest bardzo skomplikowana i analityczne czy też numeryczne rozwiązanie przepływu staje się niemożliwe nawet przy użyciu najpotężniejszych maszyn liczących. Przypomina to trochę sytuację dużej liczby molekuł gazu zamkniętych w naczyniu i wykonujących chaotyczne ruchy. Wprawdzie można napisać ich równania ruchu, jednakże trudno nawet pomyśleć o ich rozwiązaniu. Na szczęście interesują nas jedynie pewne wielkości średnie, takie jak temperatura gazu, ciśnienie czy też średnia prędkość, a te dają się stosunkowo łatwo obliczyć metodami fizyki statystycznej. Podobnie w przepływie turbulentnym wystarczyłoby wyznaczyć pewne wielkości średnie w otoczeniu każdego punktu, takie jak średnie ciśnienie czy średnia prędkość.



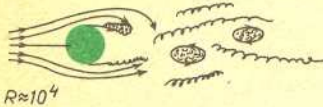
Rys. 7



Rys. 8



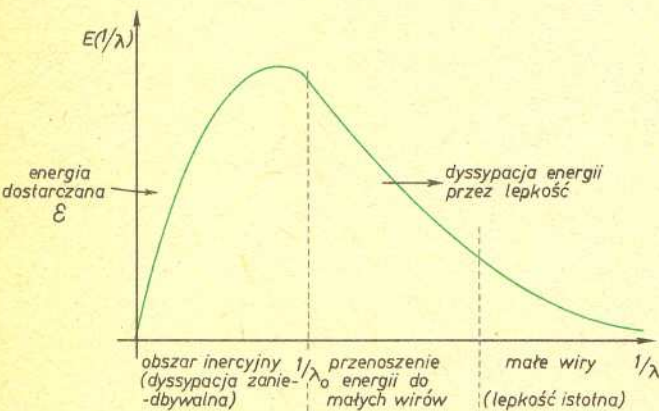
Rys. 9



Rys. 9



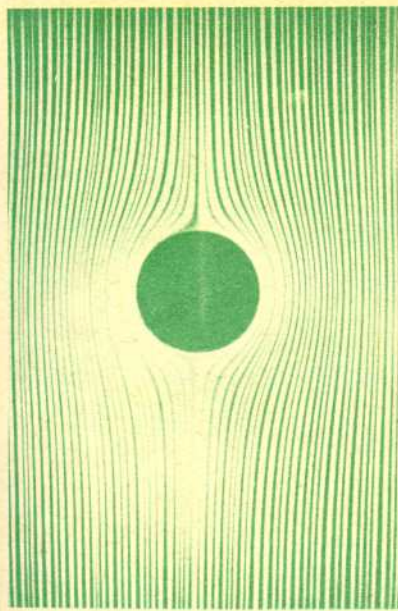
Rys. 10



Rys. 11 Rozkład energii w wirach

Było już wiele prób skonstruowania równań statystycznej teorii turbulencji, które jako jedyne niewiadome zawierałyby wielkości średnie. Wprowadzając hipotetyczne cząstki turbulencji L. Prandtl (1875—1953) uzyskał równania na średnie prędkości i średnie ciśnienia. Równania te są formalnie podobne do równań Naviera-Stokesa, w których jednakże zamiast zwykłej lepkości pojawia się tzw. lepkość turbulentna będąca konsekwencją dyfuzji „cząstek” turbulencji. Równania tego typu mają pewne praktyczne znaczenie, jednak ciągle są jeszcze bardzo dalekie od opisu rzeczywistości. Eksperyment pokazuje, że wystąpienie turbulencji związane jest z utratą stabilności przepływu laminarnego. Zanim przepływ po utracie stabilności osiągnie reżim tzw. turbulencji rozwiniętej, przechodzi on przez pewne stany przejściowe. Mamy więc rozmaite stadia turbulencji. Wydaje się, że najłatwiejsza w opisie

powinna być turbulencja rozwinięta, ta najbardziej chaotyczna. Bliższe badanie równań Naviera-Stokesa pokazuje, że w przypadku turbulencji rozwiniętej (izotropowej) rozwiązanie problemu sprowadzałoby się do wyznaczenia rozkładu energii w wirach, tzn. do odpowiedzi na pytanie, ile energii unoszą wiry o danych rozmiarach.



Metodami analizy wymiarowej, która jest wyrazem faktu, że zjawiska fizyki nie mogą zależeć od wyboru jednostek, słynny radziecki matematyk Kołmogorow doszedł do wniosku, że dla wirów o średnich rozmiarach rozkład energii powinien być dany wzorem

$$E(\lambda) = C\varepsilon^{2/3}\lambda^{5/3},$$

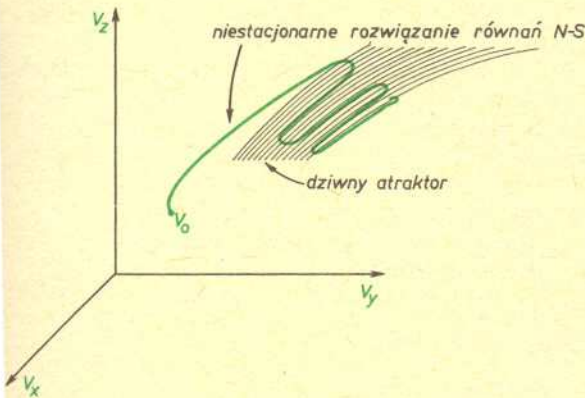
gdzie C — pewna stała, ε — energia dostarczona z przepływu przez duże wiry oraz λ — rozmiar wiru.

Problem turbulencji usiłował również rozwiązać słynny fizyk niemiecki Werner Heisenberg. Rezultaty, które otrzymał, do pewnego stopnia pokrywają się z rezultatami Kołmogorowa. Mimo licznych i upartych usiłowań żadna z podejmowanych prób nie doprowadziła jednak do zadowalającej teorii turbulencji. Z tego też powodu niektórzy nazywają turbulencję grobem dla geniuszy.

Turbulencja i dziwne atraktory

W ostatnich latach podjęto usiłowania wyjaśnienia natury turbulencji wykorzystując pojęcie dziwnych atraktorów (patrz *Delta* 7/1982). Stan układu w danej chwili, tzn. chwilowe prędkości $\mathbf{v}(x, y, z)$ oraz chwilowe pole ciśnienia $p(x, y, z)$ można reprezentować punktem w pewnej przestrzeni nieskończenie wymiarowej — przestrzeni stanów. Można to sobie wyobrazić następująco: — gdyby interesowała nas prędkość i ciśnienie tylko w jednym punkcie np. w $x = y = z = 0$, wówczas zbiór wszystkich możliwych $\mathbf{v}(0, 0, 0)$ i $p(0, 0, 0)$ stanowiłby czterowymiarową przestrzeń, w przypadku dwu punktów już ośmiowymiarową i ogólnie dla przypadku n punktów trzeba by $4n$ -wymiarowej przestrzeni. Ponieważ liczba punktów w przestrzeni jest nieskończona, zatem i wymiar naszej przestrzeni stanów jest nieskończony.

W miarę upływu czasu pole \mathbf{v} oraz p zmienia się i ewolucja układu może być przedstawiona jako krzywa w przestrzeni stanów parametryzowana czasem. W ten sposób z każdym punktem początkowym $\{\mathbf{v}(x, y, z), p(x, y, z)\}$ związana jest pewna trajektoria wyznaczona przez równania Naviera-Stokesa. Innymi słowy rozwiązanie równań Naviera-Stokesa polegałoby na skonstruowaniu pewnego odwzorowania $S(\tau)$, $\tau > 0$ przestrzeni stanów, które każdemu stanowi $\{\mathbf{v}_t, p_t\}$ w chwili t przyporządkowuje stan w chwili o τ późniejszej. Rzecz jasna $S(\tau) \cdot S(\tau) = S(2\tau)$ i ogólnie $S(\tau) \cdot S(\tau') = S(\tau + \tau')$. Jeśli teraz układ, tzn. odwzorowanie $S(\tau)$, ma dziwny atraktor, wówczas może się zdarzyć, że trajektoria przechodząca w pobliżu tego atraktora zostanie do niego przyciągnięta i błądząc w coraz to bliższym otoczeniu atraktora będzie wykonywać na pozór bardzo chaotyczne ruchy. W takim przypadku ogólny (statystyczny) obraz ruchu byłby nieczuły na zmiany początkowego stanu.



Rys. 12 Na rysunku byliśmy w stanie uwzględnić jedynie trzy wymiary przestrzeni stanów, np. wartości prędkości w wybranym punkcie przestrzeni fizycznej.

Jeśliby teraz udało się określić strukturę takiego atraktora oraz wyznaczyć średni czas przebywania trajektorii w pobliżu każdego punktu atraktora, wtedy stałoby się możliwe skonstruowanie statystycznej teorii turbulencji (podobnie jak dało się zbudować mechanikę statystyczną) i problem turbulencji byłby rozwiązany. Łatwo sobie wyobrazić, że układ w ogólności może mieć wiele dziwnych atraktorów, a co za tym idzie wiele reżimów turbulencji, każdy związany z odpowiednim atraktorem.

Jak dotąd nie potrafimy tego zrobić dla równań, które są dziecinnie proste w porównaniu z równaniami Naviera-Stokesa. Dlatego problem turbulencji wydaje się teraz trudniejszy, niż wydawało się 15 czy 20 lat temu i pod względem trudności nie ustępuje np. problemom kwantowej teorii pola. Równanie Eulera wypisane około 1750 roku czy Naviera-Stokesa (1821) oraz wzajemne relacje między rozwiązaniami tych równań mimo dwóch wieków pracy fizyków i matematyków ciągle stanowią jeszcze wielką zagadkę.