



Rozwiązanie zadania M 360. Przypuśćmy, że dla każdego  $x$   $f(x) = \cos 8x + a_7 \cos 7x + \dots + a_2 \cos 2x + a_1 \cos x > 0$ , a więc również

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= \cos(8x+8\pi) + a_7 \cos(7x+7\pi) + \dots + a_2 \cos(2x+2\pi) + a_1 \cos(x+\pi) = \\ &= \cos 8x - a_7 \cos 7x + \dots + a_2 \cos 2x - a_1 \cos x > 0, \end{aligned}$$

skąd

$$g(x) = \frac{f(x)+f(x+\pi)}{2} = \cos 8x + a_6 \cos 6x + a_4 \cos 4x + a_2 \cos 2x > 0.$$

Mamy, podobnie jak wyżej,

$$\begin{aligned} g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(8x+4\pi) + a_6 \cos(6x+3\pi) + a_4 \cos(4x+2\pi) + a_2 \cos(2x+\pi) = \cos 8x - a_6 \cos 6x + a_4 \cos 4x - a_2 \cos 2x > 0 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{g(x)+g\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \\ &= \cos 8x + a_4 \cos 4x > 0. \end{aligned}$$

Ostatecznie dla każdego  $x$  byłoby

$$\begin{aligned} \frac{h(x)+h\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{2} &= \\ = \frac{\cos 8x + a_4 \cos 4x + \cos(8x+2\pi) + a_4 \cos(4x+\pi)}{2} &= \\ = \cos 8x > 0, \end{aligned}$$

co nie jest prawdą np. dla  $x = \frac{\pi}{8}$ . Wynika

stąd, że dla dowolnych  $a_1, \dots, a_7$  funkcja  $f$  musi przyjmować również wartości ujemne.

Dystrybucje  $\theta(x)$  i  $\delta(x)$  zdefiniowane są następująco

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} + \infty$$

$$\delta(x) = 0 \text{ dla } x \neq 0 \text{ i } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Do drugiej całki wkład dają punkty na sferze o współrzędnych  $x$  i  $y$  równych zeru (ze względu na funkcje  $\delta(x)$  i  $\delta(y)$ ), czyli północny i południowy biegun. Wkład od bieguna północnego jest zero ze względu na występowanie funkcji  $\theta(-z)$ , pozostaje więc tylko wkład od bieguna południowego. W tym punkcie wektor osi  $z$  jest antyrównoległy do wektora normalnego do sfery, ich iloczyn skalarny jest więc równy  $-1$ . Stąd druga całka jest równa  $-g$ .

# Monopol magnetyczny

Mgr Jerzy KOWALSKI-GLIKMAN

Teoria monopola magnetycznego została stworzona przez P. A. M. Diraca w 1931 roku.

W ciągu z górą 50 lat, które upłynęły od tego czasu, nie była ona nigdy tak popularna, jak obecnie. Wynika to z najnowszych odkryć fizyki teoretycznej. Dirac pokazał, jak wbudować monopole magnetyczne w teorię elektromagnetyzmu, ale przez wiele lat nie widać było powodu, aby tak rozszerzoną teorię stosować do opisu rzeczywistości. Sytuacja zmieniła się diametralnie w 1974 roku, kiedy to Rosjanin Poliakov i Holender t'Hooft niezależnie udowodnili, że w ramach teorii, która kandydowała do miana jednolitego opisu oddziaływań elektromagnetycznych i słabych, istnieją obiekty, które można interpretować jako monopole magnetyczne. Teoria ta została co prawda później zarzucona, ponieważ okazała się być niezgodna z faktami doświadczalnymi, niemniej ze względu na swoją prostotę stanowi doskonale „poletko doświadczalne” dla fizyków teoretyków. Okazało się zresztą, że tego typu obiekty występują we wszystkich teoriach, branych pod uwagę jako możliwe jednolite teorie oddziaływań elektromagnetycznych, słabych i silnych. Jeśli więc wierzymy w słuszność którejkolwiek z tych teorii, musimy uwierzyć w istnienie monopoli magnetycznych.

Rozpatrzmy na początek sytuację najprostszą, czyli zwykłą elektrodynamikę Maxwella. W teorii tej dobrze znane jest rozwiązanie równań Maxwella, opisujące pole punktowego ładunku elektrycznego (monopola elektrycznego):

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}, \quad B = 0.$$

Zbadajmy teraz sytuację odwrotną; niech

$$E = 0, \quad B = \frac{1}{4\pi} \frac{g}{r^3} \mathbf{r}.$$

Źródłem takiego pola byłaby umieszczona w początku układu współrzędnych cząstka posiadająca ładunek magnetyczny, czyli właśnie monopol magnetyczny. Podejście takie napotyka jednak od razu poważne trudności. Obliczmy bowiem  $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ , gdzie  $S$  jest sferą o środku w początku

układu współrzędnych. Całka ta jest równa  $g$  (na mocy „magnetycznego prawa Gaussa”), ale z drugiej strony strumień pola magnetycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą musi być równy zero (na mocy równań Maxwella). Widzimy więc, że pole punktowego ładunku magnetycznego nie jest rozwiązaniem równań elektrodynamiki.

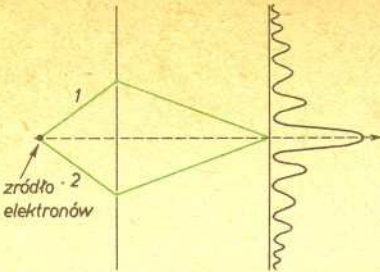
Dirac poradził sobie z tym kłopotem w następujący sposób. Przyjął on, że pole magnetyczne może być nieco innej postaci, mianowicie

$$(1) \quad \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \frac{g}{r^3} \mathbf{r} + g\theta(-z)\delta(x)\delta(y)\hat{z},$$

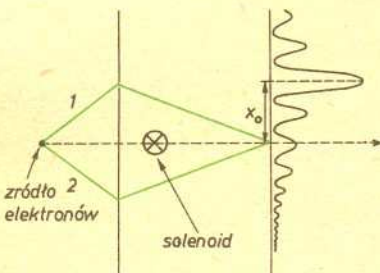
gdzie  $\hat{z}$  jest wektorem jednostkowym skierowanym wzdłuż osi  $z$ . Dodatkowy człon w powyższym równaniu można sobie wyobrazić jako opisujący pole nieskończenie cienkiego solenoidu, umieszczonego wzdłuż osi  $z$ , biegnącego od  $z = -\infty$  do początku układu współrzędnych. Można ten dodatek interpretować w ten sposób, że solenoid dostarcza ładunek magnetyczny do miejsca, w którym znajduje się monopol. Zauważmy, że teraz strumień pola magnetycznego przez sferę  $S$  równy jest zero. Istotnie: pierwszy człon da wkład do strumienia równy (jak poprzednio)  $g$ , natomiast, jak łatwo się przekonać na podstawie definicji „funkcji”  $\theta$  i  $\delta$ , całka z drugiego członu wynosi  $-g$ . Pole monopola magnetycznego w postaci podanej przez Diraca zgodne jest więc z równaniami Maxwella.

Wydawać by się mogło, że cena, jaką płacimy za to, jest bardzo wysoka — musimy bowiem jednocześnie wprowadzić nieskończony solenoid. Okazuje się jednak, że cena ta jest pozorna — istnieją bowiem warunki, przy spełnieniu których solenoid jest nieobserwowalny. Aby to pokazać, rozpatrzmy następujący eksperyment myślowy. Załóżmy, że strumień elektronów (lub dowolnych innych cząstek o ładunku elementarnym) dzielimy na dwie wiązki i puszczamy przez dwie szczeliny na ekran (rys. 1). Mechanika kwantowa mówi, że na ekranie zaobserwujemy obraz interferencyjny. Niech teraz za przesłoną znajduje się cienki, bardzo długi solenoid (rys. 2). Okazuje się, że wtedy (wniosek ten został potwierdzony doświadczalnie) obraz interferencyjny ulegnie przesunięciu, bo pole magnetyczne zmienia fazę funkcji falowej elektronu. Istnieją jednak





Rys. 1



Rys. 2

warunki, w których przesunięcie takie nie występuje. Wtedy, gdy spełniona jest równość

$$(2) \quad \frac{1}{2} n = \frac{e \cdot \Phi_B}{4\pi\hbar}$$

( $n$  jest liczbą całkowitą,  $e$  — ładunek elementarny,  $\Phi_B$  — strumień pola  $B$  przez powierzchnię ograniczoną torami 1 i 2) zmiana fazy wynosi  $2\pi n$  i jest nieobserwowalna.

Wynik ten ma bardzo ważne konsekwencje dla teorii monopola magnetycznego. Jediną metodą obserwacji solenoidu (zwanego inaczej struną) jest badanie rozpraszania na nim cząstek naładowanych. Na mocy wzoru (1) strumień pola magnetycznego przez powierzchnię przecinającą strunę wynosi  $-g$ , stąd też warunek nieobserwowalności struny (2) ma postać

$$(3) \quad \frac{1}{2} n = \frac{eg}{4\pi\hbar}$$

Równanie powyższe nosi nazwę warunku kwantyzacji Diraca (słowo kwantyzacja oznacza w tym kontekście, że pewna wielkość fizyczna przyjmuje jedynie wartości będące całkowitą wielokrotnością wartości elementarnej). Warunek ten jest wnioskiem z teorii monopola Diraca. Zapewnia on nieobserwowalność struny.

Przypatrzmy się nieco dokładniej warunkowi (3). Załóżmy, że w przyrodzie istnieją cząstki mające albo ładunek elektryczny ( $q_i$ ), albo magnetyczny ( $g_j$ ), ale nie oba naraz. Warunek Diraca przybiera postać

$$\frac{q_i g_j}{4\pi\hbar} = \frac{1}{2} n_{ij} \quad (n_{ij} \text{ jest liczbą całkowitą}).$$

Ustalmy ładunek magnetyczny  $g_j$ . Wtedy wszystkie ładunki elektryczne  $q_i$  muszą być całkowitą wielokrotnością  $2\pi\hbar/g_j$  i można znaleźć największy wspólny dzielnik  $n_{0j}$  liczb  $n_{ij}$ . Wtedy wszystkie ładunki elektryczne są wielokrotnościami  $q_0 = n_{0j} \frac{2\pi\hbar}{g_j}$ . Analogicznie można znaleźć najmniejszy ładunek magnetyczny  $g_0$ . Oczywiście,  $g_0$  i  $q_0$  są jednoznacznie określone (z dokładnością do znaku) i spełniają warunek

$$\frac{g_0 q_0}{4\pi\hbar} = \frac{1}{2} n_0, \quad n_0 \text{ całkowite.}$$

Konkluzja, że istnienie izolowanego ładunku magnetycznego prowadzi do kwantyzacji ładunku elektrycznego, jest niezwykle ważna z punktu widzenia teorii elektromagnetyzmu. Wszystkie bowiem obserwowane w przyrodzie ładunki są całkowitymi wielokrotnościami ładunku elementarnego, a na gruncie klasycznej elektrodynamiki (bez monopoli) ten fundamentalny fakt nie ma żadnego wytłumaczenia.

Dziś już nikt (prawie) nie wierzy w czystą elektrodynamikę. Przyjmuje się raczej, że stanowi ona część pewnej ogólniejszej teorii, zwanej teorią wielkiej unifikacji, która opisuje elektromagnetyczne, słabe i silne oddziaływania cząstek elementarnych w sposób jednolity. W teoriach tych jest także miejsce na obiekty, które oglądane z dużej odległości wyglądają jak monopole magnetyczne.

Spróbujmy w dużym uproszczeniu opisać, na czym rzecz polega. Wyobraźmy sobie  $n$  pól podobnych do pola elektromagnetycznego oddziałujących ze sobą w ten sposób, że każde z nich jest źródłem pozostałych. Spośród tych  $n$  pól tylko pole elektromagnetyczne jest wyróżnione, ponieważ jako jedyne ma nieskończony zasięg działania; zasięg działania pozostałych pól jest porównywalny z rozmiarami cząstek elementarnych.

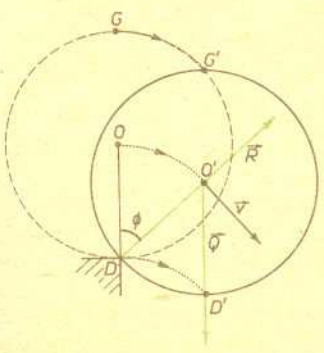
W najprostszym modelu mamy do czynienia z sześcioma polami. Są to pola  $W^+$  i  $W^-$  (tzw. naładowane bozony pośrednie) oraz pola  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  i  $\Phi_3$  (tzw. pola Higgsa). Wszystkie pięć ma skończony zasięg. Szóste interpretujemy jako pole elektromagnetyczne o zasięgu nieskończonym.

Zasięg działania pól  $W$  i  $\Phi$  jest ograniczony do odległości rzędu  $10^{-15}$  cm. Można więc wyobrazić sobie konfigurację pól taką, że poza obszarem o takim promieniu (zwanym rdzeniem) występować będzie jedynie pole elektromagnetyczne. W kontekście teorii monopola magnetycznego interesujące jest pytanie, czy możliwa jest taka konfiguracja pól w rdzeniu, aby w dużej ( $\gg 10^{-15}$  cm) odległości od niego pole elektromagnetyczne miało postać jak dla monopola magnetycznego? Czy taka konfiguracja pól będzie stabilna?

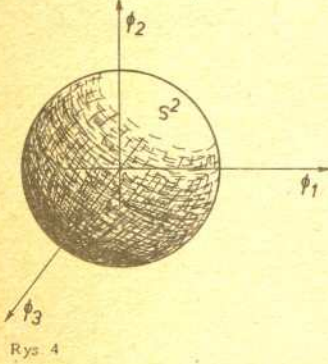
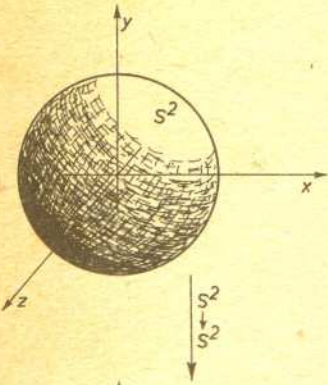
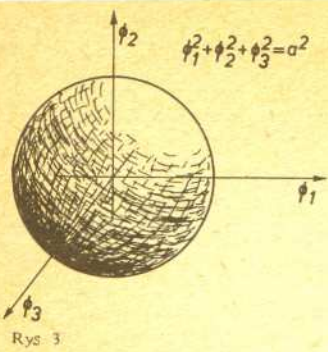
Odpowiedź na oba pytania jest twierdząca, a rozwiązania równań pola spełniające powyższe warunki podali Poliakow i t'Hooft. Obiekt opisany przez nich zasługuje w pełni na nazwę



**Rozwiązanie zadania F 149.** Kula wykonuje ruch postępowy, a każdy jej punkt porusza się po okręgu o promieniu równym promieniowi kuli. W układzie odniesienia związanym z Ziemią na kulę działają siły: ciężkości  $Q$  i reakcji od stołu  $R$  (rys.). Ich momenty względem środka kuli są zerowe, więc ruch jest ruchem postępowym; wszystkie punkty mają identyczne przyspieszenia, prędkości i doznają identycznych przemieszczeń. Podczas ześlizgiwania się prędkości muszą być w każdej chwili prostopadłe do prostej łączącej środek kuli z punktem zetknięcia z blatem (w przeciwnym razie nastąpi utrata kontaktu ze stołem). Tak więc poszczególne punkty kreślą okręgi, które pokazano na rysunku linią kropkowaną dla trzech punktów: dolnego  $D$ , środkowego  $O$  i szczytowego  $G$ . Środek kuli porusza się tak samo, jak ciało ześlizgujące się ze sferzystu sfery bez prędkości początkowej. Jak wiemy, jest to ruch zmienny i przy kącie  $\varphi = \arccos 2/3$  (łatwym do wyznaczenia z II zasady dynamiki i zasady zachowania energii) reakcja znika i kula odrywa się od stołu.







monopola magnetycznego. Rzeczywiście, ze względu na to, że wymiary rdzenia są bardzo małe, makroskopowy miernik zarejestruje punktowe źródło pola magnetycznego.

Monopol Poliakowa — t'Hoofta ma kilka interesujących własności, które odróżniają go od monopola Diraca. Przede wszystkim jest to cząstka złożona z bardziej fundamentalnych obiektów. W fizyce znamy wiele obiektów złożonych, ale monopol t'Hoofta—Poliakowa jest pod tym względem wyjątkiem. Jego stabilność zagwarantowana jest przez zupełnie inne prawa niż te, które zapewniają trwałość jąder atomowych, atomów itp. Prawa te, zwane topologicznymi prawami zachowania, odnoszą się raczej do fizyki klasycznej niż kwantowej i związane są ze strukturą pól Higgsa.

Aby rozwiązanie opisujące monopol magnetyczny było fizycznie interesujące (tzn. mogło reprezentować obiekt występujący w przyrodzie), musi mieć ono skończoną energię. Innymi słowy, gęstość energii pola musi dążyć dostatecznie szybko do zera, gdy oddalamy się od monopola. Dla pól W gęstość energii jest zero tylko gdy wartość pola jest zero (tak jak w przypadku pola elektromagnetycznego). Inaczej przedstawia się sytuacja w przypadku pól  $\Phi$ . Ich gęstość energii znika, jeśli te pola są stałe w przestrzeni oraz gdy spełniony jest warunek

$$(\Phi_1)^2 + (\Phi_2)^2 + (\Phi_3)^2 = a^2 = \text{const.}$$

Tak więc możliwe konfiguracje pól Higgsa o najniższej energii można przedstawić za pomocą sfery dwuwymiarowej o promieniu  $a$  w przestrzeni, w której współrzędnymi są  $\Phi_1, \Phi_2$  i  $\Phi_3$  (rys. 3).

Zauważmy teraz, że nieskończoność w fizycznej przestrzeni trójwymiarowej można także uważać za sferę dwuwymiarową. Oznacza to tyle, że z początku układu współrzędnych do nieskończoności możemy oddalać się w którymkolwiek z wielu kierunków, a każdy z nich odpowiada jednoznacznie pewnemu punktowi na sferze dwuwymiarowej.

Ponieważ żądamy, aby granica gęstości energii pól  $\Phi$  w nieskończoności była równa zero (aby energia monopola była skończona), widzimy, że granica tych pól w nieskończoności wyznaczona jest przez pewne odwzorowanie  $S^2 \rightarrow S^2$  ( $S^2$  — sfera dwuwymiarowa; rys. 4).

Odwzorowania  $S^2 \rightarrow S^2$  można sklasyfikować w rodziny numerowane liczbami całkowitymi. Aby to zobaczyć, rozważmy uproszczoną sytuację odwzorowań  $S^1 \rightarrow S^1$  ( $S^1$  — okrąg), które można sobie wyobrazić w następujący sposób (rys. 5). Rozcinamy pierwszy okrąg w dowolnym punkcie i powstały odcinek nawijamy na drugi. Po nawinięciu dwa końce musimy z powrotem skleić. Każdemu sposobowi nawinięcia odcinka na okrąg przyporządkujemy liczbę całkowitą  $n$ , mówiącą ile razy owinęliśmy kółko wewnętrzne. Liczba ta jest ujemna, jeśli kierunek nawijania jest przeciwny niż zwrot umownie wybrany na kółku wewnętrznym;  $n = 0$ , jeśli cały okrąg odwzorowujemy w jeden punkt, łatwo zauważyć, że nie można w sposób ciągły przejść od odwzorowania oznaczonego liczbą  $n$  do innego, oznaczonego liczbą  $m$ , jeśli tylko  $n \neq m$ . Sytuacja w przypadku odwzorowań  $S^2 \rightarrow S^2$  jest zupełnie analogiczna.

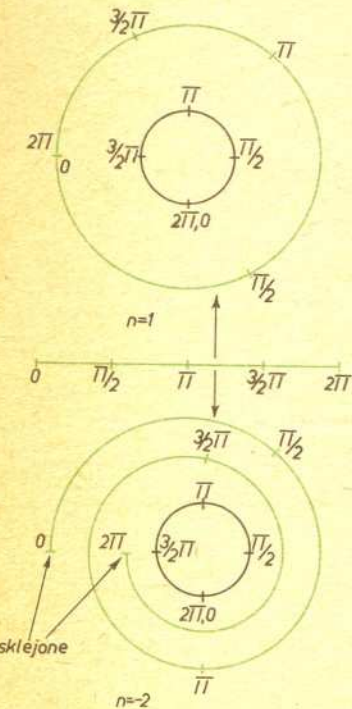
Wróćmy do monopoli. Z powyższego rozumowania wynika, że konfiguracja pól Higgsa, a więc i konfiguracja monopola określona jest całkowitą liczbą  $n$ . Okazuje się, że liczba ta związana jest z ładunkiem monopola — zachodzi bowiem równość

$$\frac{1}{2} n = \frac{eg}{4\pi\hbar}$$

Ponadto monopol Poliakowa — t'Hoofta jest stabilny. Jeśli bowiem rozpadłby się na bardziej elementarne obiekty, to  $n$  musiałoby ulec zmianie, a to jest niemożliwe. Zwróćmy jednak uwagę, że monopol jest stabilny w sensie klasycznym, co bynajmniej nie gwarantuje stabilności względem procesów kwantowych. Mógłby on ulegać rozpadowi na skutek tzw. zjawiska kwantowego tunelowania (podobnego do mechanizmu rozpadu  $\alpha$  niektórych jąder atomowych). Opisane powyżej warunki stabilności noszą nazwę topologicznych praw zachowania.

Monopol Diraca może mieć zupełnie dowolną masę. Inaczej przedstawia się sytuacja w przypadku monopola Poliakowa—t'Hoofta. Łatwo to zrozumieć zauważając, że monopol ten jest układem złożonym z cząstek o określonej masie. Z analizy wymiarowej wynika więc, że masa monopola Poliakowa—t'Hoofta powinna być proporcjonalna do masy cząstki  $W$ . Ścisłe rachunki pokazują, że współczynnik proporcjonalności jest ograniczony od dołu przez odwrotność stałej struktury subtelnej  $\frac{1}{\alpha} = 137$ .

Wszystko, co zostało powiedziane powyżej, przenosi się bez większych zmian na przypadek monopoli opisywanych przez teorie wielkiej unifikacji. Monopole opisywane przez teorie tego typu różnić się mogą jednak np. masami. Dlatego też doświadczalne odkrycie monopoli magnetycznych i zbadanie ich właściwości dałoby możliwość wybrania spośród wielu teorii kandydujących do miana teorii wielkiej unifikacji tej, która rzeczywiście opisuje świat.





## O skutkach hamowania

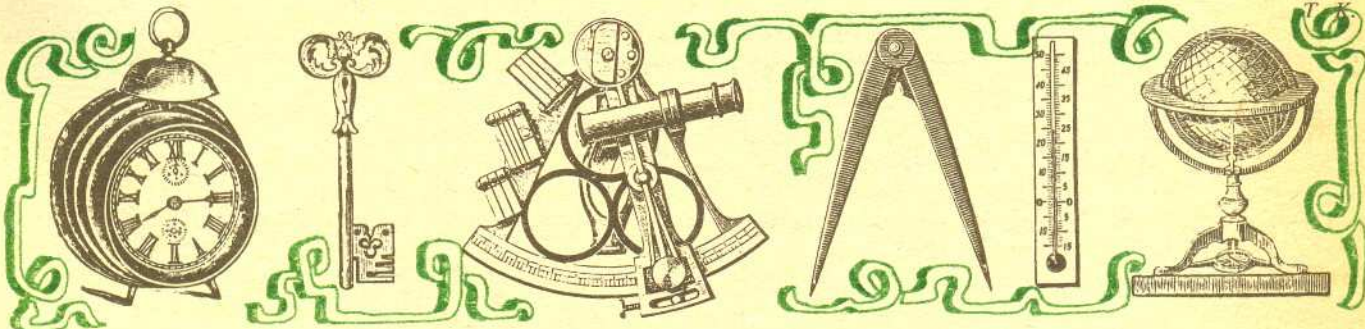
Cóż innego może być skutkiem hamowania, jeśli nie zmniejszanie prędkości pojazdu, ewentualnie aż do jego zatrzymania? — po to przecież w ogóle się hamuje.

Skoro tak, to zobaczymy, co dzieje się ze sztucznym satelitą obiegającym Ziemię po okręgu i lekko hamowanym np. przez rozrzedzoną atmosferę. Tu akurat ważne jest, by hamowanie było słabe — chodzi o to, aby w każdej chwili satelita poruszał się według praw Keplera, w szczególności stale prawie po okręgu.

Zauważamy od razu, że spodziewane zmniejszanie prędkości pociągnie za sobą spadanie satelity ku Ziemi, co zapewne skomplikuje przebieg lotu. No właśnie! Natomiast z całą pewnością możemy przewidzieć, że satelita przebijając się przez górne warstwy atmosfery (choćby bardzo rozrzedzone) traci energię, która w przypadku ruchu po orbicie zamkniętej jest

ujemna (i wynosi  $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$ , gdzie  $m$  oznacza masę satelity,  $v$  — jego prędkość,  $r$  — odległość od środka Ziemi,  $M$  — masę Ziemi,  $G$  — stałą grawitacji). Promień orbity  $r$  związany jest z energią zależnością  $r = -GMm/2E$ , a więc malenie (ujemnej od samego początku) energii powoduje malenie promienia orbity. Ale prędkość na kołowej orbicie o tym promieniu wynosi  $v = \sqrt{G(M+m)/r}$ , co wynika np. z trzeciego prawa Keplera. Stąd widzimy już, że maleniu  $r$  towarzyszy wzrost  $v$ , czyli lekko hamowany satelita przyspiesza!

Oczywiście nie będzie tak w nieskończoność. Satelita w miarę obniżania lotu będzie wchodził w coraz gęstsze warstwy atmosfery, opór powietrza będzie coraz silniejszy, wreszcie prawa Keplera przestaną opisywać jego ruch i satelita w bardzo stromym locie ulegnie już autentycznemu hamowaniu, z tym że przy tej prędkości powoduje to jego zniszczenie.



## Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

**M 358.** Malejący ciąg liczb dodatnich  $(x_1, x_2, \dots)$  spełnia dla każdego  $n$  nierówność:

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + \dots + \frac{x_{n^2}}{n} \leq 1.$$

Wykazać, że dla każdego  $n$

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n} < 2.$$

Rozwiązanie na str. 12

**M 359.** W prostokącie o powierzchni 5 leży 9 wielokątów  $W_1, \dots, W_9$ , z których każdy ma powierzchnię 1.

Wykazać istnienie takiej pary  $W_i, W_j$ , że powierzchnia  $W_i \cap W_j$  nie jest mniejsza niż  $\frac{1}{9}$ .

Rozwiązanie na str. 12

**M 360.** Czy można tak dobrać współczynniki  $a_1, a_2, \dots, a_7$ , by dla każdego  $x \in R$

$$\cos 8x + a_7 \cos 7x + a_6 \cos 6x + \dots + a_2 \cos 2x + a_1 \cos x > 0?$$

Rozwiązanie na str. 4

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

**F 149.** Jednorodna kula spoczywa na krawędzi stołu w położeniu równowagi nietrwalej (patrz rysunek). W pewnej chwili kula zaczyna ześlizgiwać się bez tarcia. Jaki będzie jej ruch do chwili utraty kontaktu z blatem i kiedy to nastąpi?

Rozwiązanie na str. 5

**F 150.** Jednorodna kula o promieniu  $R$  ześlizguje się ze schodów wzdłuż linii największego spadku. Stopnie mają identyczne długości i wysokości  $L (L \ll R)$ . Zakładając, że ruch się ustali wyznaczyć końcową prędkość kuli. Tarcie nie występuje, zderzenia ze stopniami są doskonale niesprężyste.

Rozwiązanie na str. 12

