

Rys. 1

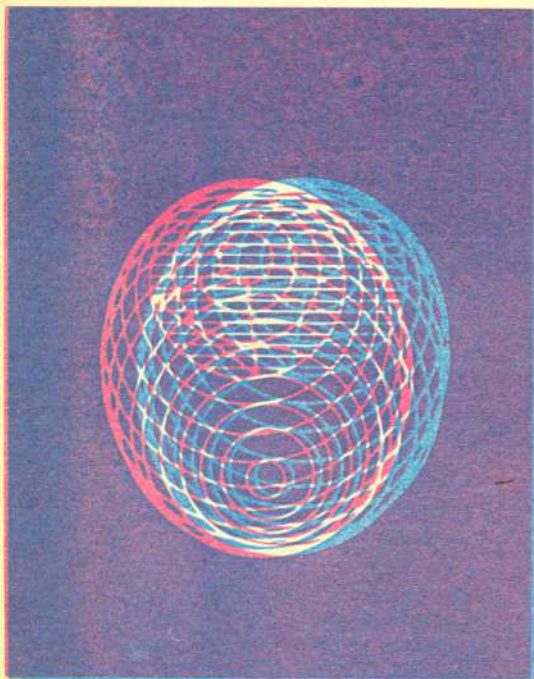
## Zasada Cavalieriego

Jak obliczyć objętość bryły powstałej z przecięcia dwóch walców o równych promieniach, których osie przecinają się pod kątem prostym (rys. 1)? Pomoże nam w tym zasada Cavalieriego.

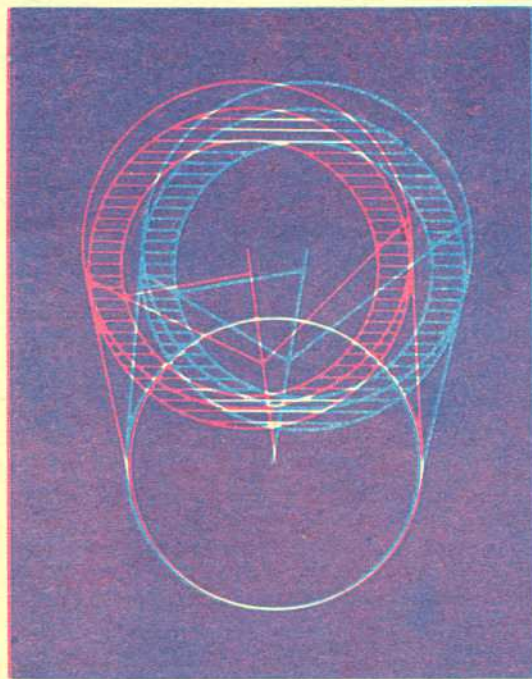
Jeśli przecięcie dwóch brył z każdą płaszczyzną poziomą daje dwie figury o równych polach, to bryły te mają równą objętość.

Ilustracją tej zasady bywa wyprowadzenie wzoru na objętość kuli (o promieniu  $R$ ). Drugą bryłą jest wtedy walec o wysokości  $2R$  i promieniu podstawy  $R$ , z którego wycięto dwa stożki o podstawach pokrywających się z podstawami walca i wspólnym wierzchołku w połowie osi walca (rys. 3) (oś walca jest pionowa). Przecinając tę bryłę płaszczyzną poziomą odległą o  $r$  ( $r \leq R$ ) od wierzchołka stożka otrzymujemy pierścień o polu  $\pi R^2 - \pi r^2$ . Przecinając kulę płaszczyzną odległą o  $r$  od środka kuli otrzymujemy koło o promieniu  $\sqrt{R^2 - r^2}$ , a więc o polu równym poprzedniemu przekrojowi. Objętość kuli równa jest więc różnicy objętości walca i objętości stożków, czyli

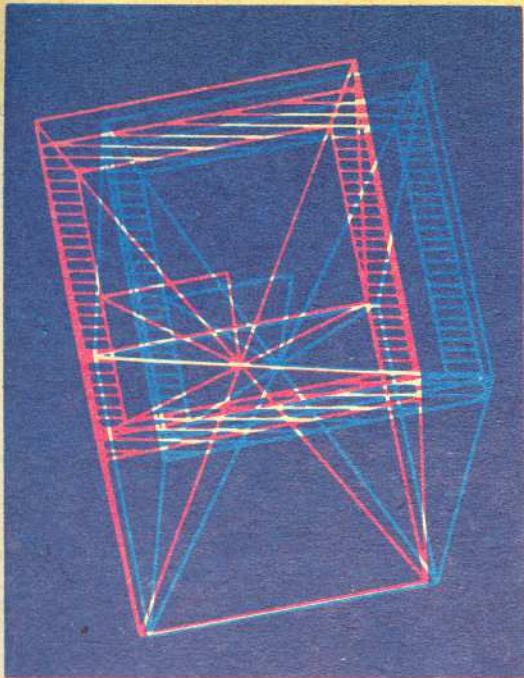
$$V_k = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Wracamy do pierwotnego zadania. Niech  $R$  będzie teraz promieniem podstawy walców (ich osie są poziome). Jako drugiej bryły użyjemy sześcianu o boku  $2R$  z wyciętymi dwoma ostrosłupami o podstawach pokrywających się z górną i dolną ścianą sześcianu i wierzchołkach w środku sześcianu (rys. 4). Przecinając tę bryłę płaszczyzną poziomą odległą o  $r$  ( $r \leq R$ ) od środka sześcianu otrzymamy figurę o polu  $4R^2 - 4r^2$ . Natomiast przecinając poprzednią bryłę otrzymujemy kwadrat o boku  $2\sqrt{R^2 - r^2}$ . A więc znów z cytowanej zasady

$$V = 8R^3 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4R^2 \cdot R = \frac{16}{3} R^3.$$

Ciekawe: mimo iż bryła powstała z brył obrotowych i jest wyraźnie zaokrąglona, we wzorze na objętość nie występuje  $\pi$ .

J. R.

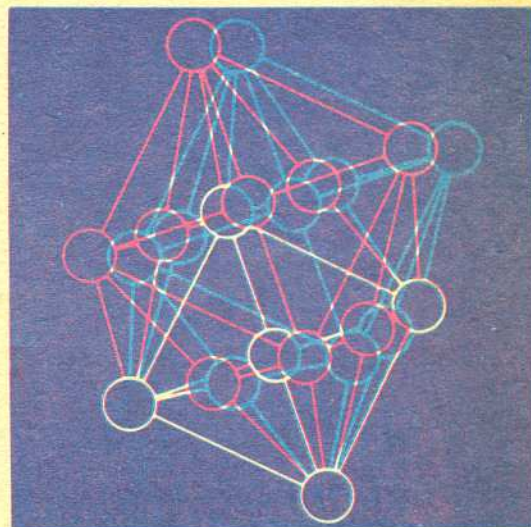
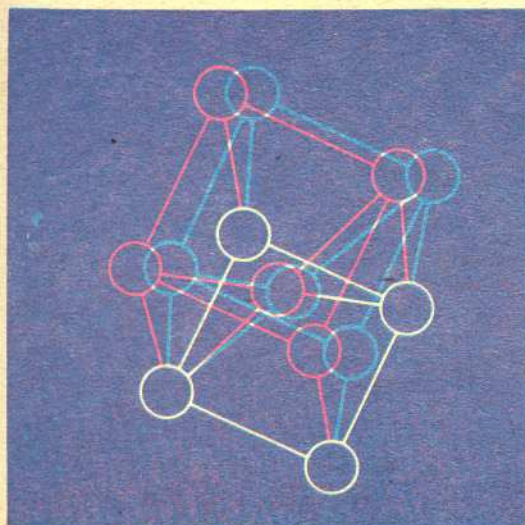


## Zadania

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

**F 151.** Przy stygnięciu drutu żelaznego rozgrzanego do wysokiej temperatury obserwuje się następujące zjawisko: długość drutu początkowo jednostajnie maleje, ale przy temperaturze  $910^\circ\text{C}$  następuje gwałtowne jego wydłużenie. Jednocześnie drut ponownie rozżarza się. Przyczyną wydłużenia jest zmiana struktury krystalicznej żelaza (patrz rysunek) ze struktury najgęstszej upakowanej ( $\beta$ ) do struktury kubicznej objętościowo centrowanej ( $\alpha$ ) i związane z tym zmniejszenie gęstości. A co jest przyczyną ponownego rozżarzania?

Rozwiązanie na str. 14



Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

**M 361.** Jakie wielokąty foremne można uzyskać w przecięciu wielościanów foremnych płaszczyzną?

Rozwiązanie na str. 17