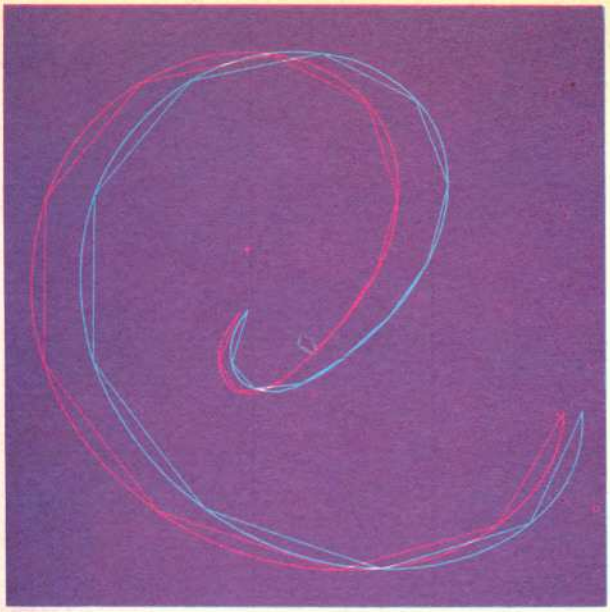
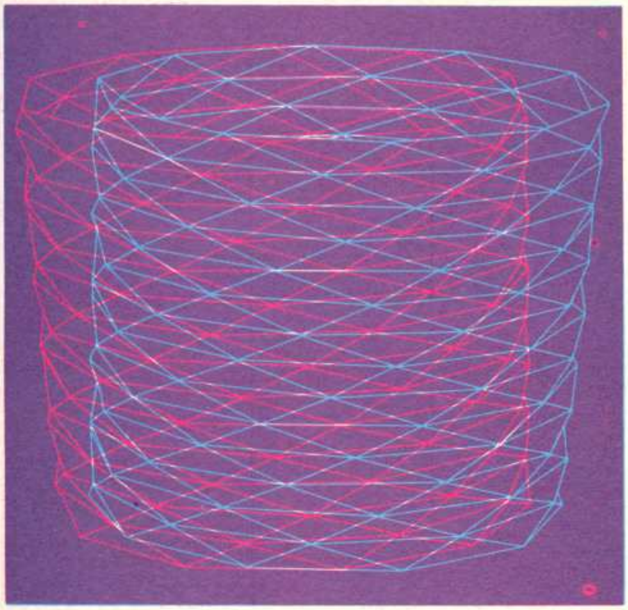
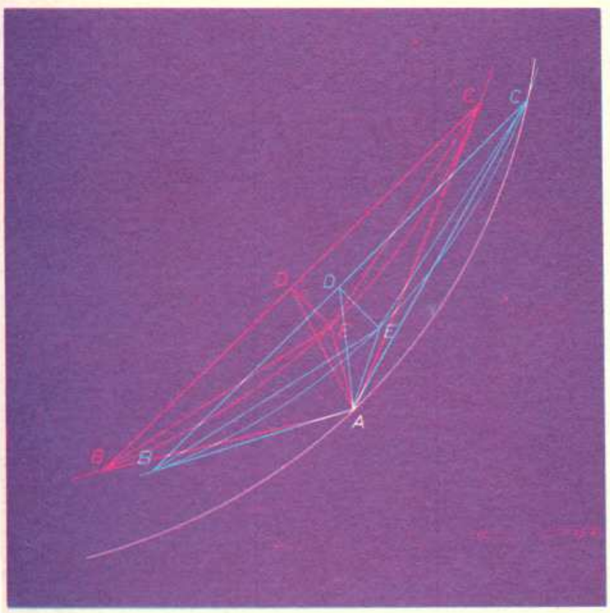
Pole powierzchni walca



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Dość łatwo zdefiniować długość krzywej (przez krzywą rozumiemy ciągły obraz odcinka). Długością takiej krzywej jest granica długości łamanych wpisanych w tę krzywą — tzn. wierzchołki łamanych leżą na krzywej — pod warunkiem, że długości wszystkich odcinków łamanych dążą do zera (rys. 1). Oczywiście trzeba pokazać, że tak określona długość nie zależy od wyboru ciągu łamanych, ale nie jest to trudne.

Przez analogię można próbować określić pole powierzchni leżącej w przestrzeni. Budujemy taki ciąg powierzchni wielościennych o wierzchołkach leżących na powierzchni, by pola ścian dążyły do zera. Pole powierzchni to granica pól tych powierzchni wielościennych.

Niestety, już w przypadku takiej powierzchni jak walec nie otrzymamy rozsądnego wyniku. Wpiszmy bowiem w walec następującą powierzchnię wielościenną. Na walcu o wysokości h i promieniu podstawy r rysujemy $m+1$ okręgów równo rozłożonych co $\frac{1}{m}$ wysokości. Każdy z nich dzielimy na n równych części tak, by punkty podziału okręgu wyższego leżały nad środkami łuków okręgu niższego. Powierzchnia wielościenna utworzona z $2mn$ trójkątów przedstawiona jest na rys. 2.

Cięciwa BC ma długości $2r\sin\frac{\pi}{n}$. Wysokość AD trójkąta jest równa $\sqrt{ED^2+AE^2} =$

$$= \sqrt{\frac{h^2}{m^2}+r^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2} \text{ (rys. 3).}$$

Polem powierzchni wielościennej jest więc

$$P_{mn} = 2\,mnr\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sqrt{\frac{h^2}{m^2}+r^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2} =$$

$$= 2\pi r\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot\sqrt{h^2+4r^2m^2\sin^4\frac{\pi}{2n}}.$$

Wiadomo, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, tak więc $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1$.

Wybieramy taki ciąg liczb naturalnych $(m_n)_{n=1}^{\infty}$, by ciąg $\frac{m_n}{n^2}$ był zbieżny. Niech $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m_n}{n^2} = q$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} m_n\cdot\sin^2\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi^2}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{m_n}{n^2}\cdot\frac{\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2} = q\cdot\frac{\pi^2}{4},$$

$$\lim_{n\to\infty} P_{m_n n} = 2\pi r\sqrt{h^2+\frac{1}{4}\pi^4 r^2 q^2}.$$

Gdy $q=0$, otrzymujemy znany wzór $2\pi r h$, natomiast dla innych wartości q wynik będzie większy. (Dla $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m_n}{n^2} = \infty$ mamy $\lim\limits_{n\to\infty} P_{m_n n} = \infty$, jeśli ciąg $\frac{m_n}{n^2}$ jest rozbieżny, to ciąg $P_{m_n n}$ też).

„Nadwyżka" pola powierzchni wielościanu nad polem powierzchni walca pochodzi stąd, że trójkąty bardzo odstają od powierzchni walca. Tak więc do określenia pola powierzchni trzeba użyć takich pojęć jak płaszczyzna styczna itd. Ale to już zupełnie inna historia.

J. R.