Teoria rozmieszczenia liczb pierwszych

Liczby pierwsze rozmieszczone są w ciągu liczb naturalnych w sposób bardzo nieregularny. Niemniej jednak do 1944 roku udało się uczonym ustalić kilka ważnych prawidłowości.

A oto postępy w zakresie powyższych twierdzeń dokonane w powojennym czterdziestoleciu.

1. (Lejeune Dirichlet 1837) Każdy ciąg arytmetyczny postaci $ak+b$, gdzie liczby naturalne a i b są względnie pierwsze, zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych.

1*. (Linnik 1947) Istnieje taka stała C, że każdy ciąg arytmetyczny $ak+b$ ($(a, b) = 1$, $a > b > 0$) zawiera liczbę pierwszą mniejszą niż a^C (przypuszczalnie $C = 2$).

2. (Hadamard — de la Vallée Poussin 1896) Liczba $\pi(x)$ liczb pierwszych nie większych niż x jest asymptotycznie równa $\frac{x}{\log x}$, dokładniej (Czudakow 1938)

$$(*) \qquad \left|\pi(x) - \int_0^x \frac{dt}{\log t}\right| < axe^{-b(\log x)^c},$$

gdzie c jest dowolną liczbą mniejszą niż $\frac{4}{7}$, zaś a i b stałymi dodatnimi zależnymi od c.

2*. (Korobow 1958, Winogradow 1958) Przy odpowiednim doborze stałych a i b nierówność (*) zachodzi dla dowolnego $c < \frac{3}{5}$ (przypuszczalnie $c = 1$).

3. (Ricci 1937) Każdy wielomian nieprzywiedlny stopnia g, który dla każdej liczby naturalnej $d > 1$ przyjmuje w pewnym punkcie całkowitym wartość niepodzielną przez d, przyjmuje w nieskończenie wielu punktach całkowitych wartości złożone z co najwyżej $3g-1$ czynników pierwszych.

3*. Liczbę $3g-1$ można zastąpić przez $g+1$ (Buchstab 1967), a dla $g = 2$ nawet (H. Iwaniec 1978) przez 2 (przypuszczalnie, dla wszystkich g, przez 1).

4. (Ingham 1937) Dla każdej liczby $c > \frac{5}{8}$ i dla dostatecznie dużych x w przedziale $(x, x+x^c)$ znajduje się co najmniej jedna liczba pierwsza.

4*. (D. R. Heath — Brown, H. Iwaniec 1979) Liczbę $\frac{5}{8}$ można zastąpić przez $\frac{11}{20}$ (przypuszczalnie nawet przez 0, z przypuszczenia sformułowanego w **2*** wynika tylko możliwość zastąpienia $\frac{5}{8}$ przez $\frac{1}{2}$. Morrochi anonsował $\frac{1051}{1920}$).

5. Każda dostatecznie duża liczba parzysta jest sumą dwóch liczb złożonych z co najwyżej 4 czynników pierwszych (Buchstab 1940); każda dostatecznie duża liczba nieparzysta jest sumą 3 liczb pierwszych (Winogradow 1937).

5*. (Chen 1966) Każda dostatecznie duża liczba parzysta jest sumą liczby pierwszej i liczby złożonej z co najwyżej dwóch czynników pierwszych (prawdopodobnie wystarczają dwie liczby pierwsze).

Zadania

Redaguje mgr Witold MARCISZEWSKI

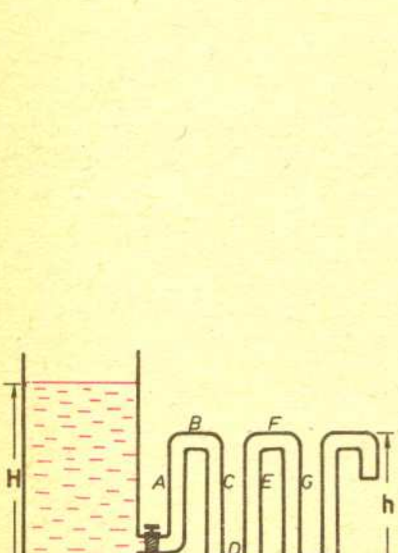
M 395. Udowodnić, że spośród dowolnych $2^{n+1}-1$ liczb całkowitych można wybrać 2^n liczb, których suma jest podzielna przez 2^n. Podać przykład zbioru $2^{n+1}-2$ liczb całkowitych nie mającego powyższej własności.
Rozwiązanie na str. 3

M 396. Czy liczba $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ jest wymierna?
Rozwiązanie na str. 7

M 397. W czworokącie $ABCD$ punkt E jest środkiem boku AB, a F — środkiem boku CD. Wykazać, że środki odcinków AF, CE, BF i DE są wierzchołkami równoległoboku lub leżą na jednej prostej.
Rozwiązanie na str. 3

Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

F 170. Lekką kulę zanurzono w nielepkiej cieczy. Na kulę działa siła wyporu F większa od siły ciężkości mg. Czy kula będzie wypływała na powierzchnię z przyspieszeniem $\frac{F-mg}{m}$?
Rozwiązanie na str. 3



F 171. W aparaturze laboratoryjnej znajduje się naczynie połączone z wygiętą kilkakrotnie rurką (rysunek). Poziom wody H w naczyniu jest wyższy od poziomu h górnych zagięć rurki. Czy po otworzeniu zaworu woda popłynie przez rurkę?
(Pominąć zjawiska kapilarne.)
Rozwiązanie na str. 7