

# Teoria rozmieszczenia liczb pierwszych

Liczby pierwsze rozmieszczone są w ciągu liczb naturalnych w sposób bardzo nieregularny. Niemniej jednak do 1944 roku udało się uczyć ustalić kilka ważnych prawdy.

1. (Lejeune Dirichlet 1837) Każdy ciąg arytmetyczny postaci  $ak + b$ , gdzie liczby naturalne  $a$  i  $b$  są względnie pierwsze, zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych.

2. (Hadamard — de la Vallée Poussin 1896) Liczba  $\pi(x)$  liczb pierwszych nie większych niż  $x$  jest asymptotycznie równa  $\frac{x}{\log x}$ , dokładniej (Czudakow 1938)

$$(*) \quad \left| \pi(x) - \int_0^x \frac{dt}{\log t} \right| < axe^{-b(\log x)^c},$$

gdzie  $c$  jest dowolną liczbą mniejszą niż  $\frac{4}{7}$ , zaś  $a$  i  $b$  stałymi dodatnimi zależnymi od  $c$ .

3. (Ricci 1937) Każdy wielomian nieprzywiedlny stopnia  $g$ , który dla każdej liczby naturalnej  $d > 1$  przyjmuje w pewnym punkcie całkowitym wartość niepodzielną przez  $d$ , przyjmuje w nieskończenie wielu punktach całkowitych wartości złożone z co najwyżej  $3g - 1$  czynników pierwszych.

4. (Ingham 1937) Dla każdej liczby  $c > \frac{5}{8}$  i dla dostatecznie dużych  $x$  w przedziale  $(x, x + x^c)$  znajduje się co najmniej jedna liczba pierwsza.

5. Każda dostatecznie duża liczba parzysta jest sumą dwóch liczb złożonych z co najwyżej 4 czynników pierwszych (Buchstab 1940); każda dostatecznie duża liczba nieparzysta jest sumą 3 liczb pierwszych (Winogradow 1937).

A oto postępy w zakresie powyższych twierdzeń dokonane w powojennym czterdziestolecu.

1\*. (Linnik 1947) Istnieje taka stała  $C$ , że każdy ciąg arytmetyczny  $ak + b$  ( $(a, b) = 1, a > b > 0$ ) zawiera liczbę pierwszą mniejszą niż  $a^C$  (przypuszczalnie  $C = 2$ ).

2\*. (Korobow 1958, Winogradow 1958) Przy odpowiednim doborze stałych  $a$  i  $b$  nierówność (\*) zachodzi dla dowolnego  $c < \frac{3}{5}$  (przypuszczalnie  $c = 1$ ).

3\*. Liczbę  $3g - 1$  można zastąpić przez  $g + 1$  (Buchstab 1967), a dla  $g = 2$  nawet (H. Iwaniec 1978) przez 2 (przypuszczalnie, dla wszystkich  $g$ , przez 1).

4\*. (D. R. Heath — Brown, H. Iwaniec 1979) Liczbę  $\frac{5}{8}$  można zastąpić przez  $\frac{11}{20}$  (przypuszczalnie nawet przez 0, z przypuszczenia sformułowanego w 2\* wynika tylko możliwość zastąpienia  $\frac{5}{8}$  przez  $\frac{1}{2}$ . Morrochi anonsował  $\frac{1051}{1920}$ ).

5\*. (Chen 1966) Każda dostatecznie duża liczba parzysta jest sumą liczby pierwszej i liczby złożonej z co najwyżej dwóch czynników pierwszych (prawdopodobnie wystarczają dwie liczby pierwsze).



## Zadania

Redaguje mgr Witold MARCISZEWSKI

M 395. Udowodnić, że spośród dowolnych  $2^{n+1} - 1$  liczb całkowitych można wybrać  $2^n$  liczb, których suma jest podzielna przez  $2^n$ . Podać przykład zbioru  $2^{n+1} - 2$  liczb całkowitych nie mającego powyższej własności.

Rozwiązanie na str. 3

M 396. Czy liczba  $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$  jest wymierna?

Rozwiązanie na str. 7

M 397. W czworokącie  $ABCD$  punkt  $E$  jest środkiem boku  $AB$ , a  $F$  — środkiem boku  $CD$ .

Wykazać, że środki odcinków  $AF$ ,  $CE$ ,  $BF$  i  $DE$  są wierzchołkami równoległoboku lub leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie na str. 3

Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

F 170. Lekką kulę zanurzono w nielepkiej cieczy. Na kulę działa siła wyporu  $F$  większa od siły ciężkości  $mg$ . Czy kula będzie wypływała na powierzchnię z przyspieszeniem  $\frac{F - mg}{m}$ ?

Rozwiązanie na str. 3

F 171. W aparaturze laboratoryjnej znajduje się naczynie połączone z wygiętą kilkakrotnie rurką (rysunek). Poziom wody  $H$  w naczyniu jest wyższy od poziomem  $h$  górnych zagięć rurki. Czy po otwarciu zaworu woda popłynie przez rurkę?

(Pomiąć zjawiska kapilarne.)

Rozwiązanie na str. 7

