Liczby przestępne i liczby Liouville'a

Mgr Jarosław GÓRNICKI

W *Delcie* 7/1984 Andrzej Pelc pisał o różnego rodzaju małych zbiorach liczb rzeczywistych. Między innymi wspomniał, iż liczby rzeczywiste można podzielić na dwa rozłączne podzbiory, z których każdy będzie w jakimś sensie mały. Jeden z takich podziałów, powstający w sposób naturalny, jest podany na końcu artykułu.

Zbiór nazywamy przeliczalnym, jeżeli wszystkie jego elementy można ustawić w ciąg (ponumerować liczbami naturalnymi). Na przykład zbiór liczb wymiernych Q jest przeliczalny, gdyż wszystkie jego elementy można ponumerować według poniższego schematu:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \\
\frac{1}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{-2}{1} & \frac{3}{1} & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{-2}{2} & \frac{3}{2} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Zacznijmy od pojęcia liczby algebraicznej.

Mówimy, że liczba rzeczywista α (podobnie liczba zespolona) jest algebraiczna, jeśli istnieje wielomian

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (n \geq 1,\ a_n \neq 0)$$

o współczynnikach wymiernych, którego α jest pierwiastkiem.

Nietrudno teraz zauważyć, że każda liczba wymierna jest liczbą algebraiczną ($q \in Q$ jest pierwiastkiem wielomianu $x-q$). Jednak nie tylko liczby wymierne są liczbami algebraicznymi. Są nimi na przykład $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt[3]{3}}$ jako pierwiastki wielomianów: x^2-2, $x^6-6x^4+12x^2-11$.

Mimo iż większość liczb, z którymi spotykamy się, to liczby algebraiczne, jest ich jednak mało w porównaniu ze wszystkimi liczbami rzeczywistymi. Cantor w 1873 roku pokazał, że zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny. A oto dowód:

Równanie $F(x) = 0$ spełnione przez jakąś liczbę algebraiczną mnożymy przez wspólny mianownik wszystkich jego współczynników.
Otrzymujemy wówczas równanie $f(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0$ o współczynnikach całkowitych nie wszystkich równych zeru. Liczbę $w(f) = st\,f + \sum_{i=0}^{st\,f} |b_i|$ nazywamy wagą wielomianu f. Dla każdego $k \in N$ zbiór $\{f: w(f) = k\}$ jest skończony, a więc zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach całkowitych $Z[x] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f: w(f) = k\}$ jest przeliczalny. Ponieważ każdy wielomian ma skończoną liczbę pierwiastków, więc $A = \bigcup_{f \in Z[x]} \{\alpha \in R : f(\alpha) = 0\}$ jest przeliczalny.

Liczba $st\,f$ to stopień wielomianu f — jest to największy wykładnik potęgi istotnie występującej w zapisie wielomianu.

To twierdzenie wobec faktu, że zbiór liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny, świadczy o istnieniu liczb rzeczywistych nie będących liczbami algebraicznymi.

Twierdzenie (*Cantora*): Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych R jest nieprzeliczalny.
Dowód: Użyjemy tak zwanej metody przekątniowej. Załóżmy, że wszystkie liczby rzeczywiste można ponumerować: $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Ustawmy wszystkie rozwinięcia dziesiętne części ułamkowych tych liczb w tablicę

$$\begin{array}{l}
x_1 = \ldots, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots \\
x_2 = \ldots, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n = \ldots, a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

W oparciu o cyfry położone na przekątnej tej tablicy zbudujemy nową liczbę rzeczywistą b zawartą między 0 i 1 w następujący sposób: n-tą cyfrą po przecinku jej rozwinięcia dziesiętnego jest liczba $a_{nn}-1$, gdy $a_{nn} \neq 0$ i 1, gdy $a_{nn} = 0$. Wtedy b różni się od liczby x_n przynajmniej na n-tym miejscu po przecinku. Tak więc $b \neq x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, co przeczy naszemu założeniu.

Liczby rzeczywiste nie będące liczbami algebraicznymi nazywamy liczbami przestępnymi (jak powiedział Euler, „przestępują one możliwości metod algebraicznych").

Jednak ta teoriomnogościowa metoda nie była początkiem teorii liczb przestępnych. Zapoczątkował ją blisko trzydzieści lat przed Cantorem matematyk francuski Joseph Liouville podając w 1844 roku przykład liczby przestępnej. Swą konstrukcję oparł na twierdzeniu zwanym *twierdzeniem Liouville'a*.

Niech $\alpha \in R$ będzie liczbą algebraiczną stopnia $n > 1$. Istnieje wówczas taka stała $C > 0$, że dla każdej liczby wymiernej $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ zachodzi nierówność

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n}.$$

Dowód: Niech $\alpha \in R$ będzie liczbą algebraiczną stopnia $n > 1$. Istnieje więc taki wielomian f stopnia n, że

$$f(\alpha) = b_n\alpha^n + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + b_1\alpha + b_0 = 0 \qquad (b_i \in Z,\ 0 \leq i \leq n).$$

Gdy $\frac{p}{q}$ jest liczbą wymierną i $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > 1$, to teza twierdzenia jest oczywiście spełniona, jeśli tylko $C \leq 1$. Obierzmy dowolną liczbę wymierną $\frac{p}{q} \in [\alpha-1, \alpha+1]$. Skoro $n > 1$, liczba $\frac{p}{q}$ nie może być pierwiastkiem wielomianu f (dlaczego?).

Stopniem liczby algebraicznej a jest najmniejszy stopień wielomianu o współczynnikach wymiernych, którego a jest pierwiastkiem.

Wobec tego mamy $\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\frac{b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + b_1 pq^{n-1} + b_0 q^n}{q^n}\right| \geq \frac{1}{q^n}$.

Twierdzenie (Lagrange'a o wartości średniej): Jeżeli funkcja liczbowa f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalna w przedziale otwartym (a, b), to istnieje $r \in (a, b)$ takie, że

$$f(b)-f(a) = f'(r)\cdot(b-a).$$

Rozwiązanie zadania F 177. Ponieważ otworki są bardzo małe, to można przyjąć, że w każdej chwili stan gazu w zbiorniku i w obu naczyniach jest stanem równowagi. Wszystkie cząsteczki trafiające w otworek przechodzą na drugą stronę. Ich liczba N na jednostkę powierzchni otworka jest proporcjonalna do koncentracji cząsteczek n i średniej prędkości v_s: $N \sim nv_s$. Ponieważ $n \sim \frac{p}{T}$, a $v_s \sim \sqrt{T}$, to otrzymujemy, że $N \sim \frac{p}{\sqrt{T}}$. Przenoszona przez cząsteczki energia E jest proporcjonalna do N i średniej energii cząsteczki, mamy więc: $E \sim N \cdot T \sim p\sqrt{T}$. W stanie ustalonym strumienie cząstek i energii wypływające ze zbiornika i wpływające do niego muszą być równe. Otrzymujemy więc układ równań:

$$\frac{2p_x}{\sqrt{T_x}} = \frac{p}{\sqrt{2T}} + \frac{p}{\sqrt{T}},$$

$$2p_x\sqrt{T_x} = p\sqrt{2T}+p\sqrt{T},$$

gdzie p_x i T_x oznaczają wielkości charakteryzujące zbiornik. Rozwiązaniem są wartości $T_x = T\sqrt{2}$, $p_x = (\sqrt{2}+1)2^{-5/4}\,p$. ($p_x \approx 1{,}02\,p$).

Redakcja pragnie zwrócić uwagę na różnicę w dowodach istnienia liczb przestępnych — Cantor wykazał, że takie liczby muszą istnieć (ponieważ nie wszystkie liczby rzeczywiste są algebraiczne), Liouville zaś podał konkretny przykład.

Stosując twierdzenie o wartości średniej otrzymujemy

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|f\left(\frac{p}{q}\right)-f(\alpha)\right| = |f'(r)|\cdot\left|\frac{p}{q}-\alpha\right| \leqslant M\cdot\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|,$$

gdzie r leży między liczbami α i $\frac{p}{q}$, $M = \sup\,\{f'(x) : |x-\alpha| \leqslant 1\}$.

Zatem

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| = \frac{\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|}{|f'(r)|} \geqslant \frac{1}{Mq^n}.$$

Za C wystarczy wziąć mniejszą z liczb 1 i $\frac{1}{2M}$.

Liouville rozważał liczby nazwane później liczbami Liouville'a.

Liczbę rzeczywistą α nazywamy liczbą Liouville'a, gdy dla każdego $n \geqslant 1$ nierówność $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$ jest spełniona dla nieskończenie wielu par (p, q) liczb całkowitych względnie pierwszych $(q > 0)$.

Pokażemy teraz, że każda liczba postaci $x_0 = \sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{10^{j!}}$, gdzie c_j są niezerowymi liczbami jednocyfrowymi, jest liczbą Liouville'a.

Niech $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n}\frac{c_j}{10^{j!}}$. Liczba ta jest wymierna i możemy przedstawić ją w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie $q = 10^{n!}$.

Zachodzi wtedy

$$\left|x_0-\frac{p}{q}\right| = \frac{c_{n+1}}{10^{(n+1)!}} + \frac{c_{n+2}}{10^{(n+2)!}} + \ldots < \frac{1}{10^{(n+1)!}}\left(9+\frac{9}{10^{(n+2)}}+\frac{9}{10^{(n+3)}}+\ldots\right) \leqslant \frac{10}{10^{(n+1)!}},$$

a wobec tego dla dowolnego naturalnego n

$$|x_0-S_n| = \left|x_0-\frac{p}{q}\right| < \frac{10}{10^{(n+1)!}} = \frac{10}{10^{n!\,n}10^{n!}} \leqslant \frac{1}{10^{n!\,n}} = \frac{1}{q^n}.$$

Zniecierpliwiony Czytelnik ma prawo zapytać: ale co to wszystko ma wspólnego z liczbami przestępnymi? Wyjaśnia nam to następujące *twierdzenie*:

Każda liczba Liouville'a jest przestępna.

Dowód: Załóżmy, że liczba y jest liczbą Liouville'a i że jest to liczba algebraiczna stopnia $n > 1$. Z twierdzenia Liouville'a mamy:

$$(*) \qquad \bigvee_{C>0}\ \bigwedge_{p\in Z}\ \bigwedge_{q\in N}\left|y-\frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n}.$$

Niech $k \in N$ będzie taką liczbą, że $C\cdot 2^k \geqslant 2^n$ i $k \geqslant n$. Ponieważ z drugiej strony y jest liczbą Liouville'a, więc istnieją liczby $p, q \in Z$, $q > 1$ takie, że $\left|y-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^k}$. Łącząc to z warunkiem (*) otrzymujemy $\frac{1}{q^k} > \frac{C}{q^n}$, skąd $C < q^{n-k} \leqslant 2^{n-k} \leqslant C$. Otrzymana sprzeczność dowodzi prawdziwości twierdzenia.

W ten sposób Liouville wykazał jako pierwszy istnienie liczb przestępnych. Zgodnie z naszymi rozważaniami na przykład liczba 0,110001 ..., w której jedynki występują na miejscach o numerach $n!$ po przecinku, jest przestępna.

Liczby przestępne zaprzątały najznamienitsze umysły, między innymi Charlesa Hermite'a, Ferdinanda Lindemanna, Davida Hilberta, Aleksandra Gelfonda. W wyniku ich pracy wykazano na przykład, że liczby: e (Hermite, 1873), π (Lindemann, 1882) są liczbami przestępnymi (patrz *Delta* 3/1983). Rozwiązano również VII problem Hilberta z 1900 roku — każda liczba postaci a^b, gdzie a jest liczbą algebraiczną różną od zera i jedności, b zaś jest dowolną liczbą algebraiczną niewymierną, jest liczbą przestępną (Gelfond, 1934 i Schneider, 1935).

Przykładem podziału, o którym była mowa na początku, jest zbiór liczb Liouville'a (jest on miary 0) i jego dopełnienie będące zbiorem cienkim.