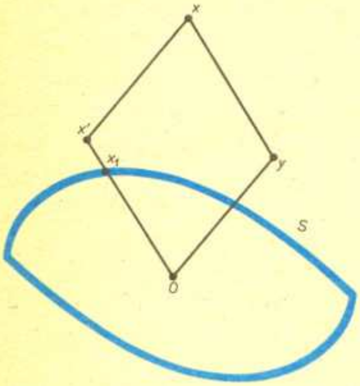
Inna odległość, inna geometria

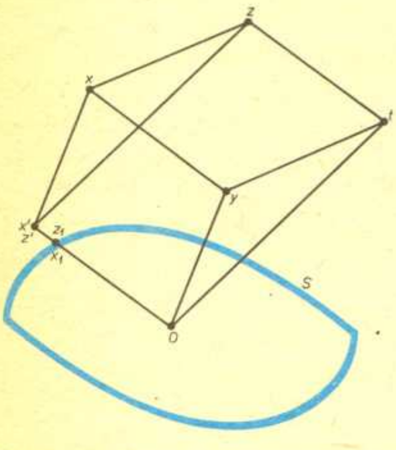
Narysujmy dowolną krzywą płaską zamkniętą S, mocno wypukłą i mającą środek symetrii, np. taką jak na rysunku. Mocno wypukła to taka, której każda cięciwa w całości (poza końcami) zawiera się w ograniczonym z obszarów, na które ta krzywa rozcina płaszczyznę (krzywa nie zawiera odcinków).



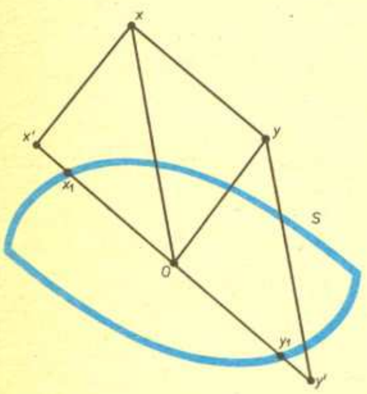
Oznaczmy jej środek przez o. Dla dowolnych dwóch punktów x, y płaszczyzny niech

$$\varrho_S(x, y) = \frac{x'o}{x_1 o},$$

gdzie $xyox'$ jest równoległobokiem, a punkt x_1 to przecięcie półprostej ox' z S.



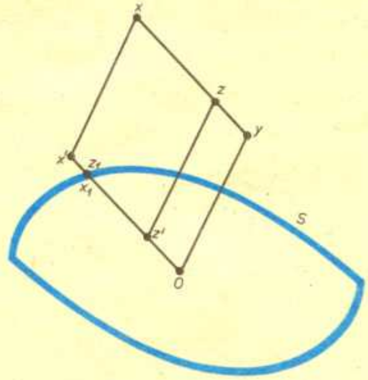
Zauważmy, że funkcja ϱ_S jest przesuwalna, to znaczy jeśli $xytz$ jest równoległobokiem, to $\varrho_S(x, y) = \varrho_S(z, t)$.



Mamy też

$\varrho_S(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$,
a z posiadania przez S środka symetrii wynika, że

$$\varrho_S(x, y) = \varrho_S(y, x).$$



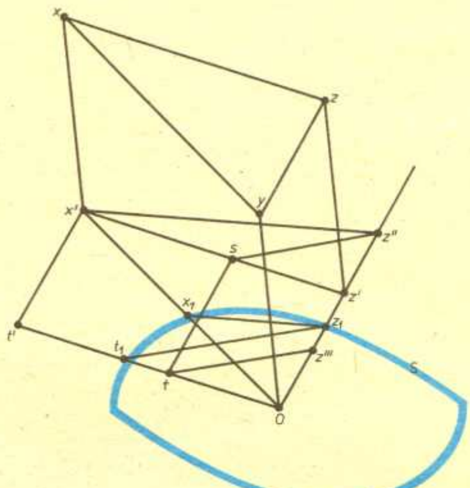
Łatwo zauważyć, że: (*) jeśli z jest punktem odcinka xy, to

$$\varrho_S(x, z) + \varrho_S(z, y) = \varrho_S(x, y).$$

Istotnie, wynika to z oczywistej równoważności

$$xz + zy = xy \leftrightarrow \frac{x'z'}{x_1 o} + \frac{z'o}{x_1 o} = \frac{x'o}{x_1 o}$$

i z przesuwalności funkcji ϱ_S.



Jeśli natomiast z nie jest punktem odcinka xy, to

$$\varrho_S(x, z) + \varrho_S(z, y) > \varrho_S(x, y).$$

Gdy z jest punktem prostej xy, wynika to natychmiast z (*). Niech więc z nie leży na prostej xy. Dorysujemy kilka punktów

z'': leży na półprostej oz_1 i $z''x' \| x_1 z_1$,
z''': leży na półprostej oz_1 i $z''' = z'z''$,
t': $t'x'z'o$ jest równoległobokiem,
t_1: przecięcie półprostej ot' z S,
s: leży na prostej $x'z'$ i $sz'' \| t_1 z_1$,
t: $tsz''z'''$ jest równoległobokiem.

Zauważmy, że $\varrho_S(x, y) = \varrho_S(x', o) = \varrho_S(z'', o)$, gdyż z twierdzenia Talesa mamy $\dfrac{x'o}{x_1 o} = \dfrac{z''o}{z_1 o}$.

Wobec tego twierdzenie jest dowiedzione, gdy z' leży poza odcinkiem oz'', bo wówczas $\varrho_S(z, y) > \varrho_S(x, y)$. Niech więc z' będzie punktem odcinka oz''. Wówczas, wobec mocnej wypukłości S, mamy

$$\sphericalangle t_1 z_1 o < \sphericalangle z_1 x_1 o,$$

a więc punkt s jest punktem odcinka $x'z'$. Ponieważ (znów z twierdzenia Talesa) $\varrho_S(z', z'') = \varrho_S(o, z''') = \varrho_S(o, t) = \varrho_S(z, s) < \varrho_S(z', x') = \varrho_S(x, z)$, więc

$$\varrho_S(x, z)+\varrho_S(z, y) > \varrho_S(z', z'')+\varrho_S(o, z') = \varrho_S(o, z'') = \varrho_S(x, y).$$

Wszystkie dotychczas ustalone własności ϱ_S mówią, że

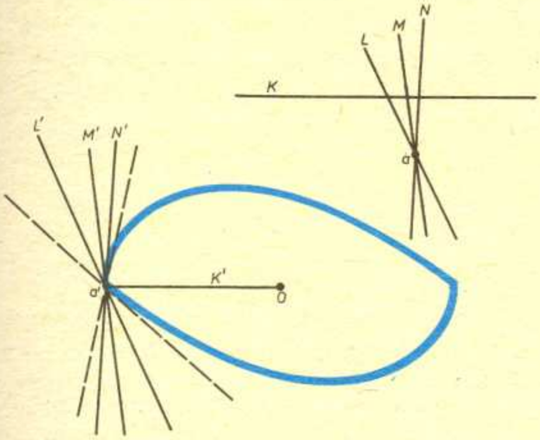
1° jest ona metryką (czyli sposobem mierzenia odległości) na płaszczyźnie,

2° jest przesuwalna,

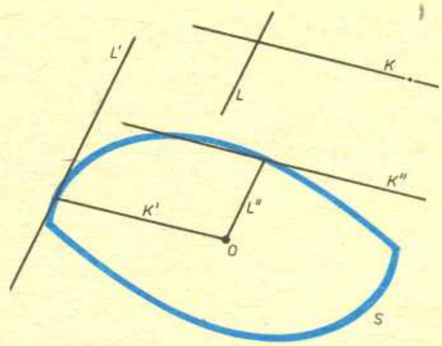
3° proste metryczne są zwykłymi prostymi (w dowolnie ustalonej metryce ϱ prosta metryczna wyznaczona przez punkty a i b, to zbiór wszystkich punktów spełniających warunek $\varrho(ax)+\varrho(xb) = \varrho(ab)$ lub $\varrho(xa)+\varrho(ab) = \varrho(xb)$ lub $\varrho(ab)+\varrho(bx) = \varrho(ax)$).

Jest to przykład metryki Minkowskiego, przy czym nie każda metryka Minkowskiego ma własność 3° (porównaj artykuł Z. Sawonia, a zwłaszcza przykłady z kwadratami).

Metryka, w szczególności ϱ_S, określa na płaszczyźnie geometrię. Pokażemy, że geometria wyznaczona przez obraną przez nas krzywą S różni się od geometrii euklidesowej.



W przestrzeni metrycznej mówimy, że prosta K przechodząca przez punkt p i przecinająca prostą L w punkcie q jest prostopadła do L ($K \perp L$), gdy odcinek pq jest najkrótszym spośród odcinków łączących p z L (mierzymy oczywiście za pomocą obranej metryki). Na rysunku widać, że prosta K jest prostopadła do każdej z prostych L, M, N, mimo że wszystkie one przechodzą przez punkt a (prostopadła w sensie metryki ϱ_S).



Kolejny rysunek pokazuje, że z $K \perp L$ nie wynika $L \perp K$ (znów w sensie metryki ϱ_S). Warto też zobaczyć, jak w przestrzeni z naszą metryką wyglądają różne figury. Czytelniku, spróbuj narysować trójkąt równoboczny, kwadrat i okrąg.

Można udowodnić, że geometria wyznaczona przez krzywą S jest geometrią euklidesową (czyli są w niej takie same twierdzenia) wtedy i tylko wtedy, gdy S jest elipsą. W szczególnym przypadku, gdy S jest okręgiem jednostkowym, ϱ_S jest zwykłą odległością.

dr hab. Marek KORDOS

Zadania

Redaguje mgr Witold MARCISZEWSKI

M 406. W czworościanie $ABCD$ wszystkie pary przeciwległych krawędzi są wzajemnie prostopadłe. Udowodnić, że środki wszystkich krawędzi leżą na jednej sferze.
Rozwiązanie na str. 16

M 407. Niech a i d będą liczbami naturalnymi. Wykazać, że w ciągu arytmetycznym a, $a+d$, $a+2d$, ... istnieje nieskończenie wiele liczb mających takie same dzielniki pierwsze.
Rozwiązanie na str. 16

M 408. W okręgu o promieniu 1 dana jest pewna liczba cięciw. Wykazać, że jeśli każda średnica przecina co najwyżej k cięciw, to suma długości wszystkich cięciw jest mniejsza od $k\pi$.
Rozwiązanie na str. 2

Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

F 178. W stanie nieważkości unoszą się w zamkniętym naczyniu dwie jednakowe krople cieczy. Ciecz jest w równowadze termodynamicznej z własną parą nasyconą. Jakie zmiany zachodzić będą w układzie?
Rozwiązanie na str. 15

F 179. Co nastąpi po połączeniu rurką dwóch jednakowych baniek mydlanych?
Rozwiązanie na str. 14