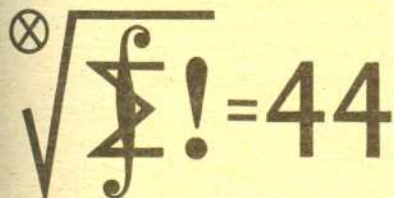


po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 105 /WT=2,47/ 1 106 /WT=2,35/
z numeru 2/1985

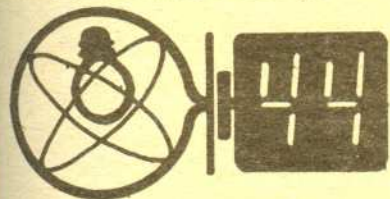
Krystyna Witek	- Ostrów Maz.	44,90pkt
Marcin Mazur	- Białystok	43,30pkt
Anna Gluza	- Toruń	42,48pkt
Jacek Mańdziuk	- Lublin	41,77pkt
Marian Roman	- Elk	41,28pkt
Tomasz Szymczyk	- Bielako-B.	40,97pkt
Grzegorz Kuś	- Kraków	39,93pkt

Serdecznie witamy panią Krystynę Witek,
drugą Panią w Klubie 44.



Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Redaguje dr Andrzej NADOLNY



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1985.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 X 1985

Zadania z matematyki nr 113, 114

113. W przestrzeni dana jest płaszczyzna π oraz dwa punkty A i B leżące poza tą płaszczyzną, po tej samej stronie. Niech Z będzie zbiorem tych punktów M , dla których istnieje sfera o środku M , przechodząca przez A i B , styczna do π . Udowodnić, że Z jest elipsą lub parabola.

114. Dany jest ciąg liczb dodatnich (a_n) . Niech $x_n = (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^{1/n}$. Dowieść, że dla każdej pary liczb naturalnych n, m zachodzi nierówność $a_{n+1} + \dots + a_{n+m} \geq (n+m)x_{n+m} - nx_n$.

Zadanie 114 przysłał pan Ryszard Mazurek z Wrocławia.

Zadania z fizyki nr 11, 12

11. W środku prostopadłościennej gablotki znajduje się przedmiot z cennego kruszcu, zawieszony na lekkiej, wiotkiej sprężynie, która jest zaczepiona do górnej ścianki. Zaproponować metody doświadczalne wyznaczenia masy tego przedmiotu, które by wykluczały jego zetknięcie się ze ściankami gablotki. Wszystkie ścianki są wykonane z takiej samej przezroczystej płyty, gęstość kruszcu nie jest znana.

12. Przyjmując, że potencjał górnej warstwy atmosfery, na wysokości 50 km, względem powierzchni Ziemi wynosi $+400$ kV, a pionowy gradient potencjału przy powierzchni Ziemi ma średnią wartość 100 V/m, obliczyć przybliżone wartości całkowitego ładunku elektrycznego kuli ziemskiej oraz całkowitego ładunku zawartego w atmosferze ziemskiej, podać znaki tych ładunków. Promień Ziemi wynosi ~ 6400 km.

7. Interwał czasoprzestrzenny



Obserwator inercyjny, posługując się układem współrzędnych w czasoprzestrzeni, może określić czas i miejsce dowolnego zdarzenia. Ilościowe porównywanie wyników obserwacji prowadzonych przez różnych obserwatorów jest możliwe pod warunkiem, że znamy związek między skalami na osiach ich układów współrzędnych. Aby ustalić ten związek, znajdziemy, dla dowolnej pary zdarzeń, wielkość zależną od współrzędnych tych zdarzeń, która dla każdego obserwatora ma tę samą wartość (tzw. niezmiennik).

Punkt w przestrzeni euklidesowej ma inne współrzędne w każdym z obróconych względem siebie układów współrzędnych kartezjańskich. Odległości między punktami nie zależą jednak od układu. Odległość jest więc niezmiennikiem obrotów (rys. 7a).

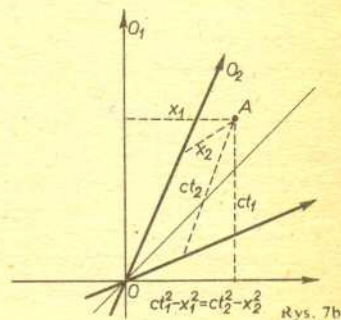
W dwuwymiarowej czasoprzestrzeni odpowiednikiem obrotu jest zmiana obserwatora inercyjnego, a niezmiennikiem wielkość

$$(*) \quad s^2 = c^2 t_1^2 - x_1^2 = c^2 t_2^2 - x_2^2,$$

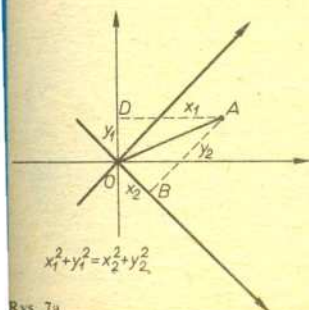
zwana interwałem czasoprzestrzennym (rys. 7b).

Udowodnimy wzór (*). Załóżmy, że dwóch obserwatorów O_1 i O_2 rejestruje zdarzenie A . Dodatkowo wybierzmy obserwatora O tak, by prędkości, z którymi poruszają się względem niego O_1 i O_2 , miały te same wartości i były przeciwnie skierowane (rys. 7c). Można łatwo wykazać, że taki wybór O jest zawsze możliwy.

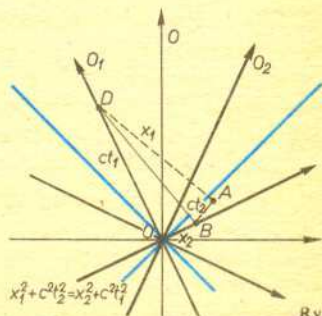
Na rysunku 7c obserwatorowi O przypisaliśmy prostokątny układ współrzędnych. Dlatego oś czasu obserwatora O_1 jest prostopadła do osi odległości O_2 , a oś odległości O_2 prostopadła do osi czasu O_1 .



Rys. 7b



Rys. 7a



Rys. 7c

Mierzenie Wszechświata

Mgr Jacek

CHOŁONIEWSKI

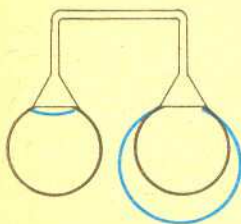


Rozwiązanie zadania F 179. Różnica ciśnień między wnętrzem bańki o promieniu R i otoczeniem jest równa

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R},$$

gdzie σ — napięcie powierzchniowe błony mydlanej.

Wynika stąd, że równowaga układu ma miejsce wtedy, gdy promienie bańek są takie same. Sytuacja przedstawiona w zadaniu odpowiada równowadze niestrawnej. Niewielkie zaburzenie prowadzące do zmniejszenia jednej z bańek spowoduje wzrost ciśnienia w jej wnętrzu i przepływ powietrza do drugiej bańki. Promień bańki będzie malał aż do momentu, gdy przyjmie ona kształt półsfery. Potem zacznie rosnąć. Nowy stan równowagi zostanie osiągnięty, gdy promienie krzywizny bańek ponownie się zrównają (rysunek). Jest to stan równowagi trwałej. Dlaczego?

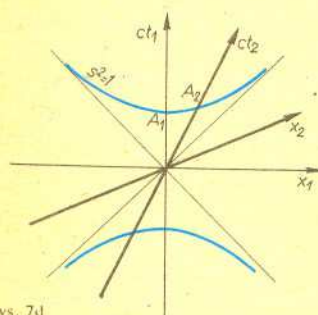


Planety, gwiazdy i galaktyki to trzy podstawowe rodzaje obiektów znajdujących się na niebie. Tematem tego artykułu jest przedstawienie metod, jakie zastosowano do wyznaczania ich rozmieszczenia w przestrzeni.

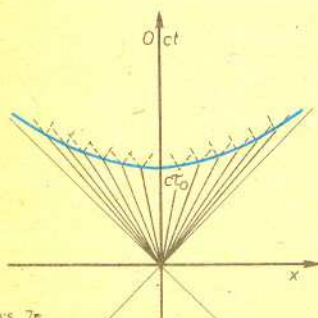
Ziemia wraz z pozostałymi ośmioma planetami krąży wokół Słońca wchodząc w skład Układu Słonecznego. Słońce z kolei jest jedną ze 100 miliardów gwiazd, jakie krążą wokół wspólnego centrum tworząc Galaktykę. Ruchy planet wokół Słońca oraz ruchy gwiazd wokół środka Galaktyki odbywają się w przybliżeniu w płaszczyznach. Przedstawiony wyżej model Układu Słonecznego został podany przez Kopernika w 1543 roku na podstawie analizy ruchów planet na niebie. Podobnie, z obserwacji ruchów własnych i prędkości radialnych gwiazd Lindblad i Oort około roku 1926 wydedukowali kinematykę naszej Galaktyki. W obu przypadkach droga do poprawnego modelu była poprzedzona szeregiem nieudanych prób. Nie powinien dziwić fakt, że daty odkrycia struktury Układu Słonecznego i struktury Galaktyki, mimo że oba układy są kinematycznie podobne, dzieli blisko 400 lat. Obserwowane ruchy gwiazd na niebie, wynikające z ich ruchu galaktocentrycznego są bowiem o wiele mniejsze od ruchów planet. Jest to spowodowane bardzo długim, wynoszącym około 200 milionów lat, okresem obiegu Słońca wokół centrum Galaktyki, podczas gdy okres obiegu Ziemi wokół Słońca wynosi tylko jeden rok.

Model układu planetarnego, który zaproponował Kopernik, wyjaśnia obserwowane ruchy planet na niebie. Ruchy te nie zależą jednak od prawdziwych rozmiarów orbit planetarnych (wyrażonych np. w centymetrach), a jedynie od wzajemnych proporcji tych orbit. Wynika z tego, że analiza samych tylko ruchów planet na niebie nie może dać odpowiedzi na pytanie o rozmiary Układu Słonecznego. Aby je poznać, potrzebna jest znajomość jakiegokolwiek odległości w obrębie tego układu, np. odległości Ziemia-Słońce. Podobnie do wyznaczenia rozmiarów Galaktyki niezbędna jest znajomość odległości do gwiazd, których ruchy na niebie były przedmiotem badań.

Pierwszym sposobem wyznaczania odległości, który zastosowano w astronomii, była tzw. metoda trygonometryczna polegająca na obserwacji danego obiektu z dwóch odległych od siebie punktów i wyznaczeniu jego przesunięcia kąтового na niebie na tle obiektów, o których wiadomo, że są bardzo daleko. Pomiarów odległości do planet, w obrębie Układu Słonecznego, dokonywano z dwóch odległych od siebie obserwatoriów na Ziemi. Do obliczenia odległości konieczna była znajomość rozmiarów kuli ziemskiej i położenia obserwatoriów na niej. Od czasów Kopernika przypisującego Ziemi ruch obiegowy wokół Słońca wiemy, że największa różnica odległości między dwoma punktami obserwacyjnymi, jaką dysponuje człowiek, równa jest rozmiarom orbity ziemskiej. Okazuje się, że jest to odległość bardzo mała w porównaniu z odległością najbliższych nawet gwiazd. Powoduje to, że ich przesunięcie na niebie wynikające z obserwacji z dwóch przeciwległych punktów orbity ziemskiej jest mniejsze od jednej sekundy łuku. Metodę trygonometryczną można więc stosować tylko do najbliższych gwiazd. Pozostała, ogromna liczba gwiazd z powodu swej znacznej odległości od nas „nie reaguje” na ruch orbitalny Ziemi.



Rys. 7d



Rys. 7e

Ponieważ dla 0 kierunek „w prawo” jest równoważny kierunkowi „w lewo”, skale na osiach θ_1 i θ_2 na rysunku 7c powinny być jednakowe. Kwadrat długości wspólnej przeciwprostokątnej trójkątów DAB i BOD jest $DB^2 = x_1^2 + ct_1^2 = x_2^2 + ct_2^2$, a stąd wynika (*).

Możemy teraz przeprowadzić „kalibrację” osi układów współrzędnych. Wybierzmy w czasoprzestrzeni wszystkie zdarzenia, które dzieli od punktu O jednostkowy interwał. Współrzędne tych zdarzeń wyznacza równanie $ct_1^2 - x_1^2 = 1$, opisujące dwie gałęzie hiperboli, której asymptotami są linie świata promieni świetlnych (rys. 7d).

Hiperbola w górnej półpłaszczyźnie przecina oś czasu obserwatora θ_1 w punkcie A_1 o współrzędnych $(1, 0)$, czyli wyznacza jednostkę na tej osi.

Dla zdarzenia A_2 współrzędna x_2 równa jest 0. Z niezmienniczości interwału wynika, że $ct_2 = 1$, a więc punkt ten wyznacza jednostkę na osi czasu obserwatora θ_2 .

Możemy teraz porównywać czasy przypisywane zdarzeniom przez różnych obserwatorów. Rysunek 7e przedstawia linie świata pęku jednakowych cząstek, które powstały w chwili $t = 0$ w punkcie $x = 0$. Cząstki mają różne prędkości. Czas życia (czas, który upływa do chwili rozpadu) spoczywającej cząstki wynosi $ct_0 = 1$. Zdarzenia rozpadu cząstek układają się na hiperboli jednostkowej. Z punktu widzenia obserwatora 0 szybkie cząstki żyją dłużej niż wolne. Wynik ten został potwierdzony w wielu eksperymentach.

Czytelnikowi pozostawiamy „kalibrację” osi odległości za pomocą hiperboli $ct_1^2 - x_1^2 = -1$ oraz porównanie wyników pomiarów długości pręta przez dwóch obserwatorów (na podstawie rys. 7d).

(cdn.)