Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 113 /WT=2,01/ i 114 /WT=2,18/
z numeru 8/1985

Andrzej Pawłowski	- Zabrze	43,64pkt
Marian Roman	- Ełk	43,09pkt
Jacek Mańdziuk	- Lublin	42,93pkt
Andrzej Sudoł	- Nowy Sącz	41,68pkt
Grzegorz Kuś	- Kraków	39,93pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	39,22pkt
Wojciech Boratyński	- Warszawa	36,02pkt

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana.**

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1986.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1986

Zadania z matematyki nr 125, 126

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

125. Dla danych liczb naturalnych m, n niech Z_m^n będzie zbiorem wszystkich n-wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, \ldots, m\}$. Dwa ciągi $(x_1, \ldots, x_n)$ i $(y_1, \ldots, y_n)$ nazwiemy bliskimi, jeśli istnieje $j \in \{1, \ldots, n\}$ takie, że $x_i = y_i$ dla $i \neq j$ oraz $|x_j - y_j| = 1$. Dla jakich par (m, n) istnieje uporządkowanie zbioru Z_m^n, przy którym każde dwa sąsiednie ciągi, a także ostatni z pierwszym, są bliskie?

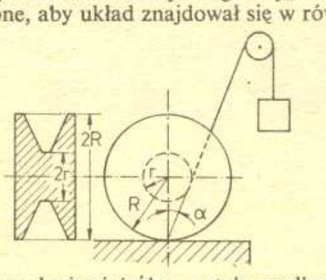
126. Skonstruować trójkąt (konstrukcja platońska — cyrkiel i liniał), mając dane: promień okręgu opisanego, długość jednego z boków i odległość ortocentrum (punktu przecięcia wysokości) od prostej zawierającej ten bok.

Zadanie **126** przysłali panowie Krzysztof Abert i Tomasz Kucharczuk z Warszawy.

Zadania z fizyki nr 23, 24

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

23. Na poziomym podłożu spoczywa szpula o masie M z nawiniętą nicią, której wolny koniec jest przerzucony przez obracający się bez tarcia bloczek i obciążony ciężarkiem o masie m. Duży promień szpuli (patrz rysunek) wynosi R, promień jej rdzenia — r. Zaznaczony na rysunku kąt α ma taką wartość, że $\sin\alpha = r/R$. Współczynnik tarcia statycznego szpuli o podłoże wynosi f, współczynnik tarcia kinetycznego — f_k. Jakie warunki muszą być spełnione, aby układ znajdował się w równowadze?



Czy możliwe jest opadanie ciężarka ze stałą prędkością bez zmiany punktów styku szpuli z podłożem? Jeżeli tak, to jakie warunki muszą być spełnione w tym przypadku?

24. Na podstawie przytoczonych niżej danych obliczyć przybliżoną temperaturę, jaka panowałaby na powierzchni Ziemi, gdyby w ogóle nie ogrzewało jej Słońce. Dane: pionowy gradient temperatury w skorupie ziemskiej — $2 \cdot 10^{-2}$ K/m, współczynnik przewodnictwa cieplnego skorupy ziemskiej — 3 W/Km, stała Stefana-Boltzmanna — $6 \cdot 10^{-8}$ W/m²K⁴. Uwaga: podane parametry geofizyczne mają charakter orientacyjny wobec dużego zróżnicowania w zależności od miejsca na kuli ziemskiej.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1985

Przypominamy treść zadań:

117. W klasie czworościanów $ABCD$ opisanych na kuli o środku O i promieniu 1, takich, że $OA \geqslant OB \geqslant OC \geqslant OD$, znaleźć kresy dolne możliwych wartości odległości OA, OB, OC, OD.

118. Dane liczby rzeczywiste x_i, $i = 1, \ldots, n$, oraz liczba naturalna nieparzysta p. Dowieść, że $\sum x_i^{p+1} \sum x_i^{p-1} \geqslant (\sum x_i^p)^2$.

117. Poszukiwane kresy wynoszą, odpowiednio: 3, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, 1.
Dowód:
a) Środki ciężkości ścian czworościanu $ABCD$ są wierzchołkami czworościanu podobnego do niego, w skali 1/3. Sfera przechodząca przez te środki ma promień $\geqslant 1$ (= promień sfery wpisanej w $ABCD$), zatem sfera opisana na $ABCD$ ma promień $\geqslant 3$. Stąd $OA \geqslant 3$. Równość zachodzi dla czworościanu foremnego.
b) Przetnijmy czworościan $ABCD$ płaszczyzną przechodzącą przez O i równoległą do ściany BCD. Otrzymamy w przekroju trójkąt podobny do BCD, w skali < 1, i zawierający koło o promieniu 1. Zatem koło wpisane w trójkąt BCD ma promień > 1, a co za tym idzie, koło opisane na trójkącie BCD ma promień > 2. Niech O' będzie rzutem punktu O na płaszczyznę BCD. Wówczas $O'B \geqslant O'C \geqslant O'D$, więc $O'B > 2$, a ponieważ $OO' = 1$, więc $OB > \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$. Przy tym OB może być dowolnie bliskie $\sqrt{5}$; wystarczy, żeby ściana BCD była trójkątem równobocznym opisanym na kole o promieniu nieznacznie większym od 1, stycznym w swoim środku do kuli wpisanej w czworościan.
c) Każda krawędź czworościanu $ABCD$ ma długość > 2; w szczególności $CD > 2$. Niech O'' będzie rzutem punktu O na prostą CD. Wówczas $O''C \geqslant O''D$, więc $O''C > 1$, a ponieważ także $OO'' > 1$, więc $OC > \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Przy tym OC może być dowolnie bliskie $\sqrt{2}$; wystarczy, żeby krawędź CD była nieco dłuższa od 2 i żeby jej środek leżał blisko powierzchni kuli wpisanej w czworościan.
d) Odległość OD jest > 1, ale może być dowolnie bliska 1 — to oczywiste.

118. Oznaczmy przez L i P odpowiednio lewą i prawą stronę danej w zadaniu nierówności. Przekształcamy:

$$L = \sum_{i,j} x_i^{p+1} x_j^{p-1} = \sum_i x_i^{2p} + \sum_{i<j} x_i^{p+1} x_j^{p-1} + \sum_{i>j} x_i^{p+1} x_j^{p-1} =$$

$$= \sum_i x_i^{2p} + \sum_{i<j} (x_i^{p+1} x_j^{p-1} + x_i^{p-1} x_j^{p+1}),$$

$$P = \sum_i x_i^{2p} + 2 \sum_{i<j} x_i^p x_j^p.$$

Stąd

$$L - P = \sum_{i<j} (x_i^{p+1} x_j^{p-1} + x_i^{p-1} x_j^{p+1} - 2 x_i^p x_j^p) =$$

$$= \sum_{i<j} (x_i x_j)^{p-1} (x_i - x_j)^2 \geqslant 0.$$

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44F"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 11 /WT=2,63/ i 12 /WT=2,90/ z numeru 8/1985

Piotr Bała	- Toruń	27,33pkt
Dzierżysław Lipniacki-Lublin		18,82pkt
Tomasz Rawlik	- Gliwice	16,53pkt

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1985

Przypominamy treść zadań:

15. Z izolowanego przewodu wykonano zamkniętą pętlę w kształcie ósemki, złożonej z okręgów o średnicy 1 cm i 2 cm (przewody w miejscu skrzyżowania stykają się ze sobą). Pętlę umieszczono w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 1 T, prostopadłym do płaszczyzny pętli. Czy izolacja przewodu, która wytrzymuje napięcie 10 V, ulegnie przebiciu, gdy pole magnetyczne zostanie wyłączone, zanikając liniowo do zera w czasie 1 ms?

16. Oszacować rozmiary planetoidy, od której człowiek mógłby się oderwać wykonując skok. Zakładamy gęstość planetoidy równą gęstości Ziemi.

15. Podczas zaniku pola magnetycznego w pętlach I i II indukuje się siła elektromotoryczna odpowiednio

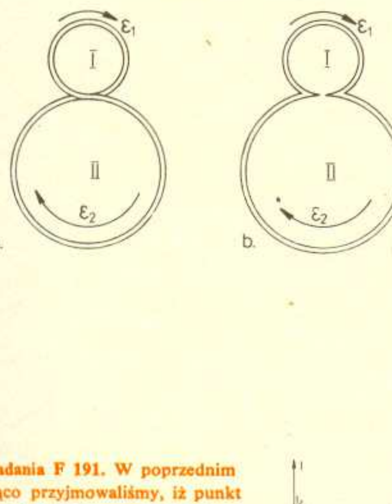
$$\mathscr{E}_1 = \pi r_1^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} \quad \text{oraz} \quad \mathscr{E}_2 = \pi r_2^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

($r_1 = 1$ cm, $r_2 = 2$ cm, $\Delta B = 1$ T, $\Delta t = 1$ ms).
Rozpatrzmy przypadek krzyżujących się pętli (rys. 1a).
W obwodzie (rys. 2a) płynie prąd

$$I = \frac{\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1}{R_1 + R_2},$$

gdzie R_1 i R_2 oznaczają opory odpowiednich pętli: $R_1 = kr_1$, $R_2 = kr_2$ (k — stały współczynnik). Napięcie między punktami S i P (skrzyżowanie przewodu) wynosi $U_{SP} = \mathscr{E}_1 + R_1 I$. Rozwiązując układ wszystkich równań otrzymujemy

$$U_{SP} = \pi r_1 r_2 \frac{\Delta B}{\Delta t} \approx 0{,}6 \text{ V}.$$



Rys. 1 a. b.

W przypadku przewodu wygiętego jak na rysunku 1b (obwód — rys. 2b) mamy równania

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{R_1 + R_2}, \qquad U_{SP} = -\mathscr{E}_1 + R_1 I,$$

których rozwiązaniem jest

$$U_{SP} = \pi r_1 r_2 \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \frac{\Delta B}{\Delta t} \approx 0{,}2 \text{ V}.$$

Wniosek: izolacja przewodu nie ulegnie przebiciu.

16. Do ucieczki z planetoidy potrzebna jest energia równa wartości bezwzględnej energii grawitacji na jej powierzchni (względem nieskończoności)

$$E_{up} = \mathrm{G} \frac{M_p m}{R_p},$$

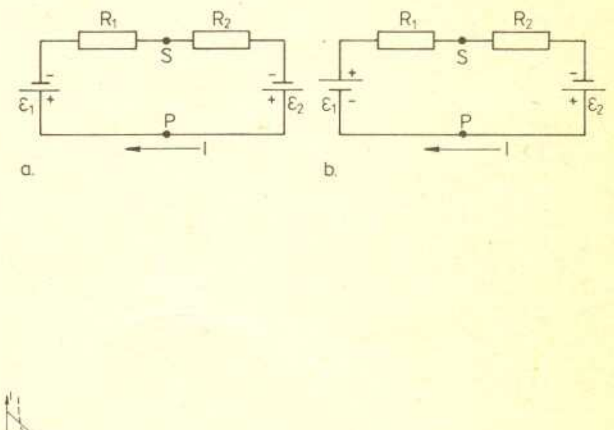
gdzie G — stała grawitacji, R_p — promień planetoidy, M_p — masa planetoidy, m — masa ciała. Podczas skoku na Ziemi środek ciężkości ciała (po oderwaniu stóp od podłoża) wznosi się na wysokość h, odpowiada temu energia

$$E_{sz} = \mathrm{G} \frac{M_z m h}{R_z^2}.$$

Wobec równości $E_{up} = E_{sz}$ otrzymujemy $\dfrac{M_p}{R_p} = \dfrac{M_z h}{R_z^2}$.

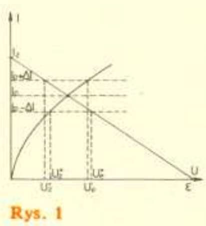
Ponieważ $\dfrac{M_p}{M_z} = \dfrac{R_p^3}{R_z^3}$, więc ostatecznie $R_p = \sqrt{hR_z}$.

Przyjmując $h = 0{,}5$ m, obliczamy $R_p = 1{,}8$ km.
Maksymalna średnica planetoidy, z której dałoby się odskoczyć, jest więc około 4 km.

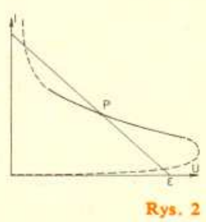


Rys. 2 a. b.

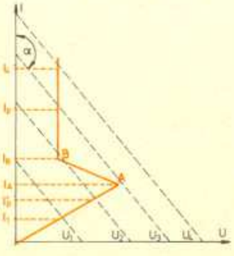
Rozwiązanie zadania F 191. W poprzednim zadaniu milcząco przyjmowaliśmy, iż punkt pracy (U_p, I_p) określony przez warunek konieczny mówiący, że napięcie na elemencie $U_e = I \cdot R$ równa się napięciu „wypracowywanemu" przez źródło na swoich zaciskach $U_z = \mathscr{E} - Ir$, odpowiada stabilnej pracy obwodu. Dla charakterystyki jak na rysunku 1 istotnie tak jest. Gdy z jakichkolwiek przyczyn natężenie prądu w obwodzie wzrośnie o ΔI, napięcie na zaciskach źródła U_z' staje się mniejsze niż U_e' — napięcie niezbędne do utrzymania w elemencie prądu $(I_p + \Delta I)$. Analogicznie po zmaleniu natężenia do wartości $(I_p - \Delta I)$, $U_z'' > U_e''$. Tak więc w obu przypadkach działa czynnik kierujący wartość natężenia ku pierwotnej wartości I_p (rys. 1).
Przeprowadzając podobne rozumowanie Czytelnik samodzielnie wykaże, iż punkt pracy dla charakterystyki pokazanej na rysunku 2 odpowiada stanowi niestabilnemu.

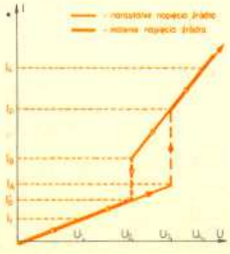


Rys. 1



Rys. 2





Rys. 3

Warunkiem stabilności jest więc

$(\mathrm{tg}\beta)_{I=I_p} > (\mathrm{tg}\alpha)_{I=I_p}$, gdzie:

$\mathrm{tg}\beta = \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}I} \overset{\mathrm{ozn}}{=} R_d$ — tzw. opór dynamiczny elementu,

$\mathrm{tg}\alpha = -r$; r — stały opór wewnętrzny źródła.

Zatem: $R_d + r > 0$.

Oznacza to, że obwód pracuje stabilnie, gdy całkowity opór obwodu jest dodatni, niestabilnie — gdy ujemny, równość zeru odpowiada nieokreśloności punktu pracy.
W warunkach zadania odcinek charakterystyki AB odpowiada niestabilności i wykres $I = f(U)$ przedstawia rysunek 3.
Warto na koniec nadmienić, że nasza wyidealizowana charakterystyka z grubsza przybliża charakterystykę łuku elektrycznego bądź neonówki.