

W artykule o fraktalach rysunek 10 pochodzi z pracy P. Blancharda, rysunek 23 z artykułu Peitgena, rysunki zaś 24, 25, 26 nadesłał dla *Delta* J. Curry. Pozostałe rysunki komputerowe wykonała na Merze 400 Teresa Przytycka. Fotografia na okładce pochodzi ze zbioru J. Hubbarda, który stworzył kilka serii diapozytywów przedstawiających powiększenia pewnych fragmentów żuka Mandelbrota.

Doc. dr Feliks PRZYTICKI

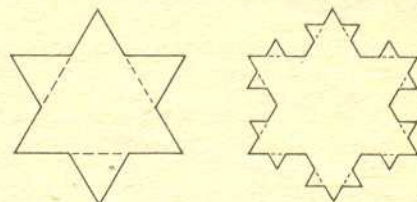
W ostatnich latach fascynację uczonych pracujących na pograniczu matematyki i fizyki wzbudziły niezwykle obiekty: fraktale. Najprostsze z nich znane były od kilkudziesięciu lat, ale dopiero teraz, dzięki użyciu dużych komputerów zaczęto otrzymywać ogromne kolekcje tych „zwierząt”. Przyciąga ich piękno, powszechność występowania i znaczenie w wyjaśnianiu zjawisk przyrody. W tym artykule opowiem, jaki związek mają fraktale z iterowaniem wielomianów i z poprawnością metody Newtona szukania pierwiastków.

W 1904 roku Helge von Koch opisał konstrukcję dziwnego zbioru, tak zwanego **płatka śniegu**. Do boków trójkąta równobocznego przyklejmy z zewnątrz trójkąty podobne, trzy razy mniejsze. Do każdego odcinka brzegu otrzymanej gwiazdy znowu przyklejmy trójkąt trzy razy mniejszy i tak dalej. Brzeg  $K$  otrzymanego w ten sposób płatka śniegu jest topologicznie okręgiem, to znaczy istnieje ciągle, wzajemnie jednoznaczne przekształcenie  $\varphi$  okręgu  $S^1$  na  $K$ . Jest dziwnym okręgiem, w żadnym swoim punkcie nie ma wektora stycznego (to znaczy  $\varphi$  nie jest różniczkowalne). Co ciekawsze, wymiar Hausdorffa  $HD(K) = \log 4 / \log 3 \approx 1,2618$ . (To widać z definicji podanej obok. Dla każdej liczby naturalnej  $n$  można  $K$  pokryć  $4^n$  kołami o promieniu  $\varepsilon_n = 3^{-n}$ .) Tymczasem każda porządna krzywa ma wymiar (w każdym sensie) równy 1. Niezwykłą własnością  $K$  jest **samopodobieństwo**, dowolnie małe kawałki mają podobny kształt do dużych! W 1905 roku włoski matematyk Ernesto Cesàro zachwycony „wewnętrzna nieskończonością” krzywej Kocha napisał tak: „Gdyby była obdarzona życiem, można by się jej pozbyć tylko niszcząc ją w całości. Inaczej odżywałaby znowu i znowu z głębi swoich trójkątów, jak to czyni życie we Wszechświecie”.

Przez wiele późniejszych lat matematycy konstruowali podobnie osobliwe kształty i oswajali się z nimi, aż wreszcie Benoit Mandelbrot, matematyk z USA, stworzył dla nazwania takich kształtów słowo **fractal** (od łacińskiego słowa *fractus* — złamany, składający się z kawałków). Ogłosił, że fraktale występują powszechnie i że taka jest właśnie geometryczna struktura przyrody. Na fraktale można natrafić w bardzo prostych sytuacjach. Wystarczy np. iterować wielomian  $z^2 + c$  na płaszczyźnie zespolonej, a kształty, które się pojawiają, są naprawdę niezwykle. Wydawałoby się nic prostszego jak pojedynczy wielomian stopnia 2. Tymczasem komputery rysują przedziwne „zwierzęta”, a skomplikowany aparat XX-wiecznej matematyki pozwala je zrozumieć tylko powierzchownie.

## Iteracja wielomianów $z^2 + c$ .

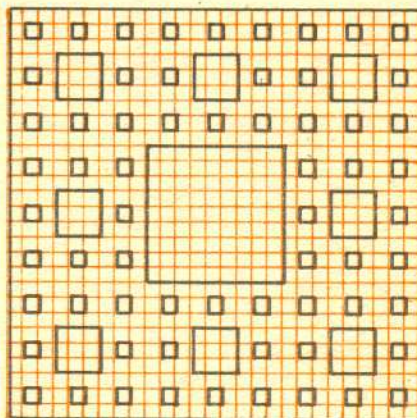
Rozważmy wielomian zmiennej zespolonej  $f_c(z) = z^2 + c$ . Ciąg punktów  $z_n$  w płaszczyźnie zespolonej  $C$ , określony wzorem  $z_{n+1} = f_c(z_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  nazywa się **trajektorią** (w przód) dla  $z_0$  przy działaniu  $f_c$ . Jest to ciąg wartości kolejnych iteracji  $f_c$  (złożenia wielomianu  $f_c$  z samym sobą) w punkcie  $z_0$ , to znaczy  $z_0, f_c(z_0), f_c \circ f_c(z_0), \dots$ . Będziemy dalej pisać  $f_c^n = f_c \circ f_c \circ \dots \circ f_c$  ( $n$  razy). (Oblicz, Czytelniku, kilka pierwszych iteracji, a zobaczysz, jakie pojawiają się wielomiany stopnia 2, 4, 8,  $\dots$ . To już nie jest tylko badanie „trywialnego” wielomianu stopnia 2.) Czy trajektoria jest zbieżna? Jeśli nie, to jaki jest zbiór punktów, do których podchodzi dowolnie blisko? Jak będzie zmieniać się odpowiedź na te pytania przy zmianach punktu początkowego  $z_0$ ? A jak przy zmianach parametru  $c$ ? Takie pytania nazywa się pytaniami o **dynamikę**  $f_c$ . Jeśli przy zmianie parametru  $c$  w pewnym momencie następuje wyraźna zmiana dynamiki, to mówimy, że następuje **bifurkacja**.



Rys. 1. Tak powstaje płatek śniegu.

Dla dowolnej liczby  $\varepsilon > 0$  oznaczmy symbolem  $N_\varepsilon(L)$  minimalną liczbę kół o promieniu  $\varepsilon$ , którymi można pokryć zbiór  $L$ . Pojemność zbioru  $L$  to następująca liczba:  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf (\log N_\varepsilon(L)) / (-\log \varepsilon)$ .

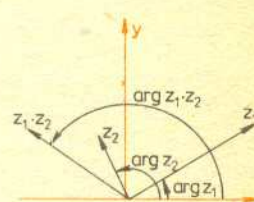
Definicja wymiaru Hausdorffa jest nieco inna, ale jeśli zbiór  $L$  jest samopodobny, to pojemność i wymiar Hausdorffa są takie same. (Zajrzyj do artykułu „Ułamkowy wymiar” w *Delcie* 2/1985).



Rys. 2. Ten „dywan Sierpińskiego” jest także fraktalem. Jego wymiar Hausdorffa jest równy  $\log 8 / \log 3$ .

Mandelbrot napisał piękną książkę pod tytułem „The Fractal Geometry of Nature” wydaną w 1982 roku w USA.

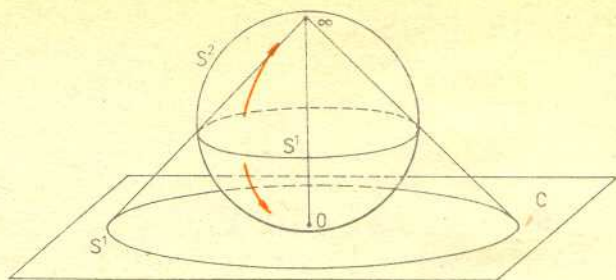
Płaszczyzna zespolona  $C$  to zwykła płaszczyzna, w której wprowadzamy działania dodawania i mnożenia. Każdy punkt  $A$  płaszczyzny utożsamiamy z wektorem  $\vec{OA}$ . Punkty płaszczyzny (liczby zespolone) dodajemy tak jak odpowiadające im wektory. Każdy punkt (wektor)  $z = (x, y)$  ma moduł  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  (czyli po prostu długość wektora) i argument  $Arg(z)$  — kąt, jaki tworzy ten wektor z osią  $x$  (rys. 3). Iloczyn liczb  $z_1$  i  $z_2$  to liczba, której argument jest równy sumie argumentów  $z_1$  i  $z_2$  ( $\text{mod } 2\pi$ ), a moduł jest iloczynem modułów. Oś  $x$  jest nazywana osią rzeczywistą, a punkt  $(0, 1)$  oznaczamy literą  $i$ . Dla punktu  $z = (x, y)$  oznacza się  $x = \text{Re } z$ ,  $y = \text{Im } z$ . Zauważ, Czytelniku, że  $z = \text{Re } z + i \text{Im } z$ . Zauważ też, że  $i^2 = i \cdot i = -1$ ,  $i$  jest więc pierwiastkiem równania  $z^2 = -1$ . Można więc napisać  $i = \sqrt{-1}$ . Liczbę o module  $r$  i argumentcie  $a$  oznacza się przez  $re^{ia}$ .



Rys. 3



Przeanalizujmy przykład  $c = 0$ , to znaczy wielomian  $f(z) = z^2$ . Zbadajmy go na  $C \cup \{\infty\}$  (na płaszczyźnie zespolonej z dołączonym punktem w nieskończoności), czyli na dwuwymiarowej sferze  $S^2$ . Istnieją dwa punkty stałe, przyciągające (tak zwane ścieki):  $0$  i  $\infty$ . Zbiór punktów, których trajektorie są zbieżne do  $0$  (taki zbiór nazywamy basenem przyciągania), to koło  $\{z: |z| < 1\}$ . Basenem przyciągania punktu  $\infty$  jest zbiór  $\{z: |z| > 1\}$ . Oba baseny rozdziela okrąg  $S^1$ . Ten okrąg dla przekształcenia  $z^2$  ma przedziwne własności: zbiór punktów okresowych, które są źródłami, jest w nim gęsty (to znaczy każdy punkt  $z \in S^1$  jest granicą pewnego ciągu źródeł). Trajektoria (w przód) dla prawie każdego punktu okręgu  $S^1$  jest w  $S^1$  gęsta. Okrąg  $S^1$  pełni jakby rolę dużego źródła, wewnątrz którego jest chaos. (Zajrzyj do artykułu „Chaos na odcinku” Delta 7/1984.)



Rys. 4.  $C \cup \{\infty\} = S^2$ . Strzałki pokazują dynamikę przekształcenia  $z \mapsto z^2$ .

Na początku XX wieku dwaj matematycy francuscy Gaston Julia i Pierre Fatou stworzyli, niezależnie od siebie, ogólną teorię iteracji funkcji wymiernych na  $S^2$ , to znaczy funkcji postaci  $f(z) = (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0) / (b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0)$ , (gdzie  $a_j, b_j \in C$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $b_m \neq 0$ ) stopnia co najmniej 2. Stopień to  $\max(n, m)$  przy założeniu, że ułamek  $f$  jest nieskracalny. (Trajektorie punktów dla  $f$  stopnia 1 wyglądają dosyć prosto. Jak?) Podstawowym pojęciem tej teorii jest **zbiór Julii**  $J(f)$ . Można go zdefiniować jako **domknięcie** zbioru wszystkich źródeł. Oto niektóre jego własności:

$J(f)$  jest domknięty w  $S^2$ . Zbiór  $J(f)$  jest  $f$ -niezmienniczy, to znaczy  $J(f) = f(J(f)) = f^{-1}(J(f))$ . Albo  $J(f) = S^2$  (to się jednak rzadko zdarza, a nigdy dla wielomianów), albo  $J(f)$  jest zbiorem brzegowym, to znaczy nie zawiera żadnego koła. Z drugiej strony  $J(f)$  jest w sobie gęsty, to znaczy każdy jego punkt jest granicą ciągu innych jego punktów (w szczególności  $J(f)$  jest nieprzeliczalny). Ponadto  $J(f) = J(f^n)$ .

Już chyba zauważyłeś Czytelniku, że dla  $f(z) = z^2$  zbiór  $J(f)$  to okrąg  $S^1$ . Niech teraz parametr  $c$  będzie bliski 0, ale  $c \neq 0$ . Można udowodnić, że wtedy zbiór Julii jest topologicznie okręgiem, podobnie jak przy  $c = 0$ , a przy tym ma strukturę fraktala, jego wymiar Hausdorffa jest większy niż 1 (rys. 5). Zbiór  $S^2 \setminus J(f_c)$  składa się z dwóch składowych — basenów przyciągania ścieku  $\infty$  i ścieku bliskiego 0 (spełniającego równanie  $z^2 + c = z$ ). A co się dzieje, kiedy  $c$  nie jest bliskie 0? Zanim odpowiemy na to pytanie, wróćmy jeszcze do ogólnej teorii.

Omówmy teraz klasyfikację i wygląd składowych zbioru  $S^2 \setminus J(f)$ . Zbiór Julii dla funkcji wymiernej  $f$  jest niezmienniczy, więc obraz dowolnej składowej zbioru  $S^2 \setminus J(f)$  przy działaniu  $f$  jest też jego składową, a przeciwobraz sumą kilku składowych (nie więcej niż stopień  $f$ ). Dopiero całkiem niedawno amerykański matematyk Dennis Sullivan udowodnił, że istnieje najwyższe skończona liczba składowych okresowych, to znaczy takich, że  $f^N(A) = A$  dla pewnej liczby  $N > 0$ . Każda inna składowa po jakimś czasie przechodzi w składową okresową. Inaczej mówiąc, żadna składowa nie błądzi.

Typy dynamiki na składowych okresowych,  $f^N(A) = A$ , zostały również sklasyfikowane, podzielone na 4 klasy:

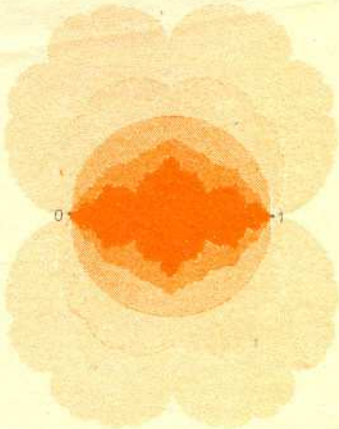
a. Składowa  $A$  jest przyciągana przez iteracje przekształcenia  $g = f^N$  do pewnego ścieku  $a \in A$  będącego punktem stałym przekształcenia  $g$ . (Basen przyciągania dla  $f$ -trajektorii okresowego punktu  $a$ , czyli zbiór punktów, których  $f$ -trajektorie są zbieżne do zbioru  $\{a, f(a), \dots, f^{N-1}(a)\}$ , może nie być spójny. Może zawierać nawet nieskończenie wiele składowych, które nie są okresowe i dopiero po jakimś czasie zaczynają „chodzić” okresowo. Składowa  $A$  basenu przyciągania, zawierająca punkt  $a$ , nazywa się **basenem bezpośredniego przyciągania**.)

b. Składowa  $A$  jest basenem bezpośredniego przyciągania pewnego punktu neutralnego wymiernego  $a$  należącego do brzegu zbioru  $A$ . (Mówimy, że  $a$  jest punktem **neutralnym**, jeśli  $|g'(a)| = 1$  i **neutralnym wymiernym**, jeśli  $g'(a)$  jest pierwiastkiem z 1, to znaczy  $(g'(a))^k = 1$  dla pewnej liczby naturalnej  $k$ . Liczba  $k$  będzie dalej oznaczać najmniejszą liczbę naturalną o tej własności.) W otoczeniu punktu  $a$  dynamika iteracji przekształcenia  $g^k$  wygląda podobnie jak iteracji przekształcenia  $h(z) = z(1+z^k)$  dla pewnej liczby naturalnej  $s$ . Kierunki, w których poruszają się punkty przy działaniu iteracjami przekształcenia  $g^k$  (lub  $h$ ), są na rysunku 6 przedstawione strzałkami. Punkt  $a$  przyciąga bezpośrednio  $s \cdot k$  basenów  $A_1, \dots, A_{s \cdot k}$ , których suma nazywa się **kwiatkiem**.  $A_i$  nazywają się **płatkami**. Przekształcenie  $g$  permutuje te płatki. Mamy  $s$  cykli, każdy długości  $k$ .

Punkt stały  $w$  dla  $f$  to taki punkt, że  $f(w) = w$ . Punkt okresowy  $w$  o okresie  $n$  (to znaczy stały dla przekształcenia  $g = f^n$ ) nazywa się **ściekiem**, jeśli moduł pochodnej  $|g'(w)| < 1$ , a **źródłem**, jeśli  $|g'(w)| > 1$ . (Pochodną w sensie zespolonym definiuje się podobnie jak pochodną dla funkcji rzeczywistych  $h'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{h(z+\Delta z) - h(z)}{\Delta z}$ . Reguły przydatne

przy jej obliczaniu (pochodna sumy, iloczynu, ilorazu, złożenia) okazują się takie same.) Zauważ, Czytelniku, że przekształcenie  $g = f^n$  w małym otoczeniu ścieku w zmniejsza odległości. Stąd wynika, że trajektoria każdego punktu z ustalonego, dostatecznie małego otoczenia ścieku jest zbieżna do trajektorii tego ścieku. Dla źródła odwrotnie, odległości się zwiększają, więc każda trajektoria, poza trajektorią samego źródła, musi wyjść z takiego otoczenia.

Dla dowolnego zbioru  $A$  w  $S^2$  zdefiniujmy brzeg jako zbiór takich punktów  $z \in S^2$ , że każde koło (w  $S^2$  w metryce sferycznej) o środku w punkcie  $z$  przecina zarówno zbiór  $A$ , jak i jego uzupełnienie. Zbiór w  $S^2$  nazywa się **domknięty**, jeśli zawiera swój brzeg, a **otwarty**, jeśli jest ze swoim brzegiem rozłączny. Domknięcie zbioru to jego suma z brzegiem, wnętrze to zbiór minus jego brzeg. (Ćwiczenie: udowodnij, że domknięcie zbioru  $A$  w  $S^2$  to zbiór wszystkich punktów w  $S^2$ , do których są zbieżne ciągi punktów z  $A$ .)



Rys. 5. Brzegi pięciu obszarów od jasnoszarego do czarnego to zbiory Julii dla wielomianów  $\lambda z(1-z)$  przy  $\lambda$  odpowiednio 1, 3/2, 2, 5/2, 29/10. Te wszystkie zbiory Julii są topologicznie okręgami. (Dalej znajdziesz komentarz, dlaczego wszystko jedno, czy rozpatrywać wielomiany takiej postaci, czy  $z^2 + c$ . Podanym wyżej parametrom  $\lambda$  odpowiadają parametry  $c = 1/4, 3/16, 0, -5/16, -261/400$ .)

Zbiór otwarty  $A \subset S^2$  nazywa się **spójny**, jeśli każde dwa jego punkty można połączyć łamaną leżącą w  $A$ . Dowolny zbiór otwarty  $A \subset S^2$  można przedstawić w postaci sumy ciągu rozłącznych zbiorów otwartych i spójnych. Te zbiory nazywają się **składowymi** zbioru  $A$ .



c. Składowa  $A$  jest dyskiem Siegela. To znaczy, że  $A$  jest topologicznie kołem i istnieje na nim taki układ współrzędnych, w którym przekształcenie  $g = f^N$  jest obrotem wokół pewnego punktu  $a \in A$  stałego dla  $g$ , neutralnego, wymiernego;  $g(z) = g'(a) \cdot z$ .

d. Składowa  $A$  jest topologicznie pierścieniem, a  $g$  na nim jest obrotem, znowu o kąt niewspółmierny z  $\pi$ . (To się jednak nie może zdarzyć dla wielomianów.)

Okazuje się, że w każdym basenie przyciągania musi być jakiś punkt krytyczny, to znaczy taki, że  $f'(b) = 0$ . Okazuje się też, że w brzegu każdego dysku Siegela (lub pierścienia) suma trajektorii wszystkich punktów krytycznych dla  $f$  musi być gęsta (nie wiadomo, czy bezpośrednio w brzegu musi być jakikolwiek punkt krytyczny!). A więc do obsługi każdej okresowej składowej zbioru  $S^2 \setminus J(f)$  potrzebny jest jakiś punkt krytyczny.

Zajmijmy się znowu wielomianami  $f_c(z) = z^2 + c$ . Punkt 0 jest oczywiście dla każdego wielomianu  $f_c$  punktem krytycznym.  $c = f_c(0)$  jest wartością krytyczną (czyli obrazem punktu krytycznego). Jest jeszcze drugi punkt krytyczny:  $\infty$  (więcej punktów krytycznych nie ma, dla dowolnej funkcji wymiernej  $f$  jest najwyżej  $2 \cdot (\text{stopień } f) - 2$  punktów krytycznych). Punkt  $\infty$  jest zarazem punktem stałym i ściekiem. Oznaczmy przez  $A_c$  jego basen przyciągania. Okazuje się, że jest to zarazem basen bezpośredniego przyciągania i że  $J(f_c)$  jest jego brzegiem.

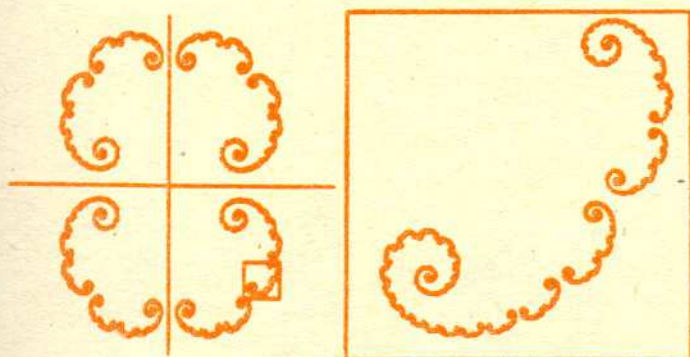
„Zwierzaki” na rysunkach 5, 7, 10, 15–21 przedstawiają zbiory  $Z_c = S^2 \setminus A_c$  dla różnych parametrów  $c$ . Zauważ, że  $Z_c = \{z \in \mathbb{C}; \text{ciąg } f_c^n(z) \text{ jest ograniczony}\}$ . Zbiór Julii to brzeg „zwierzaka”.

Wśród wielomianów  $f_c(z) = z^2 + c$ , inaczej mówiąc wśród parametrów  $c$ , szczególnie jest zbiór zwany zbiorem Mandelbrota

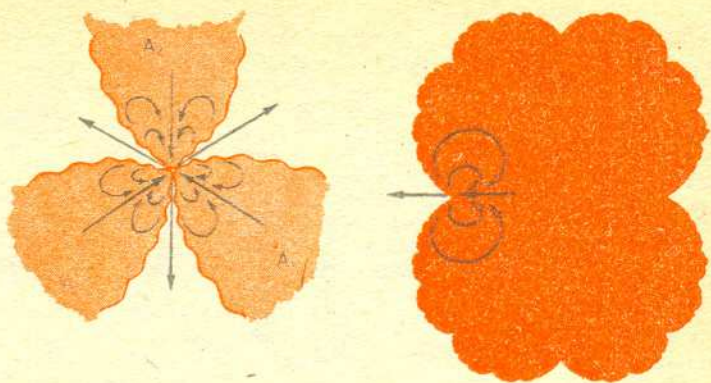
$$M = \{c \in \mathbb{C}; \text{ciąg } f_c^n(0) \text{ jest ograniczony}\}$$

(spójrz na rysunek 11). Jeśli  $c \notin M$ , to oba punkty krytyczne 0 i  $\infty$  należą do basenu  $A_c$ , „Zwierzą” nie ma więc wnętrza — brak byłoby punktów krytycznych do jego obsługi. Tak naprawdę to dla  $c \notin M$  „zwierzaków” w ogóle nie ma, jest pył. Wytlumaczę zaraz dlaczego.

Zbiór  $A_c$  można zbudować biorąc pewne otoczenie  $B$  punktu  $\infty$ , na przykład  $\{z; |z| > R\}$  dla dużej liczby  $R$ . Potem trzeba dodać pierścienie (w topologicznym sensie)  $B_1 = f_c^{-1}(B) \setminus B$ , następnie  $B_2 = f_c^{-1}(B_1)$ ,  $B_3 = f_c^{-1}(B_2)$  itd. Jeśli  $i$  jest pierwszym indeksem takim, że  $c \in B_i$ , to  $B_i$  zawiera wartość krytyczną. Wtedy  $B_{i+1}$  przypomina oprawkę okularów (spójrz na rysunek 9). Oznaczmy szkła tych okularów (topologicznie koła) przez  $L_1^{(i+1)}$ ,  $L_2^{(i+1)}$ . Niech  $f_c|_{L_j^{(i+1)}}$  oznacza przekształcenie  $f_c$  objęte do  $L_j^{(i+1)}$ ,  $j = 1, 2$ . Wtedy  $(f_c|_{L_j^{(i+1)}})^{-1}(B_{i+1})$  to znowu okulary, ale mniejsze. W uzupełnieniu mamy 4 szkielek dwóch par okularów  $L_j^{(i+2)}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . Następnie tworzymy 8 szkielek  $L_j^{(i+3)}$  i tak dalej. Można udowodnić, że średnice tych szkielek  $L_j^{(s)}$  dążą do 0 przy  $s \rightarrow \infty$ . Zbiór Julii składa się z punktów widocznych przez dowolnie małe okulary. Ten zbiór jest zbiorem Cantora. To rzeczywiście pył. Okazuje się, że  $A_c$  ma nieskończenie wiele (nawet nieprzeliczalnie wiele) dziur. Przy okazji trudno nie zauważyć samopodobieństwa  $J(f_c)$ .



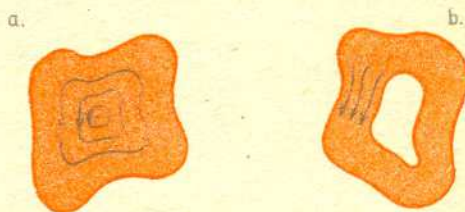
Rys. 10. Baranki. Zbiór Julii dla  $z^2 + 3/10$  (na drugim obrazku pokazany jest powiększony mały kwadracik z pierwszego obrazka). Dla  $z^2 + 1/4$  zbiór Julii był brzegiem muszli (rys. 7), teraz muszla się rozspalała.



Rys. 6. Kwiatek.

Rys. 7. Muszla. Dla wielomianu  $z(1-z)$  kwiatek w punkcie neutralnym ma tylko jeden płatek.

Istnieje piękny związek dynamiki przekształcenia  $f$  wokół neutralnego punktu okresowego (o okresie  $N$ ) z teorią liczb. Okazuje się, że jeśli liczba  $\lambda = (f^N)'(a)$  spełnia dla pewnej stałej  $C > 0$ , pewnej liczby naturalnej  $n$  i dla każdego ułamka  $p/q$  nierówność:  $|\text{Arg}(\lambda) - 2\pi p/q| > C/q^n$ , to  $a$  ma swój dysk Siegela, wewnątrz którego leży. Ten warunek oznacza intuicyjnie, że  $\text{Arg}(\lambda)$  wolno aproksymuje się liczbami wymiernymi. Okazuje się, że prawie wszystkie liczby z  $S^1$  mają tę własność.



Rys. 8 a) dysk Siegela,

b) pierścien (istnienie takich pierścieni dla pewnych przekształceń wymiernych udowodnił dopiero kilka lat temu matematyk francuski Michel Herman).

Punkt  $\infty$  bada się zmieniając układ współrzędnych na  $S^2$  tak, aby punkt  $\infty$  przeszedł na punkt 0. Na przykład przekształceniem  $h(z) = \frac{1}{z}$ . Wtedy

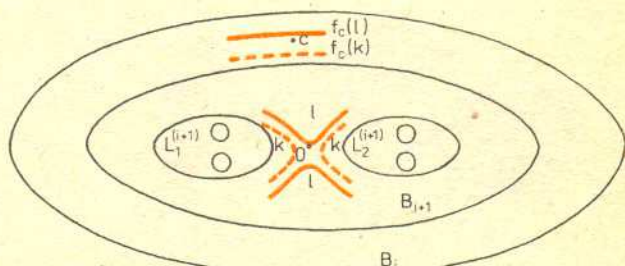
$$g_c(z) = h \circ f_c \circ h^{-1}(z) = \frac{1}{1+cz^2} = \frac{z^2}{1+cz^2}, \quad g'_c(z) = \frac{2z+2cz^3-2cz^3}{(1+cz^2)^2} = \frac{2z}{(1+cz^2)^2}$$

Rzeczywiście otrzymujemy  $g_c(0) = g'_c(0) = 0$ .

Każdy wielomian stopnia 2 po odpowiedniej zmianie układu współrzędnych na  $\mathbb{C}$  (przekształceniem postaci  $az+b$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ ) przybiera postać  $z^2+c$ . Trzeba po prostu przesunięciem przeprowadzić punkt krytyczny (różny od  $\infty$ ) na 0 i potem zmienić jednostkę w układzie współrzędnych, żeby uzyskać współczynnik przy  $z^2$  równy 1. Parametr  $c$  jest wyznaczony jednoznacznie (pomyśl, dlaczego). Rodzina  $z^2+c$  jest więc w pewnym sensie uniwersalna.

Wielomian stopnia 2 możemy także znormalizować przeprowadzając przesunięciem jeden z dwóch punktów stałych na 0. Mnożąc potem współrzędne przez odpowiednią stałą otrzymujemy wielomian postaci  $z^2+\lambda z$  lub postaci  $\lambda z(1-z)$  (jeśli chcemy, żeby przeciwobraz punktu stałego 0, różny od niego samego, był równy 1). Dla wielu rozważań takie rodziny są lepsze. Z drugiej strony parametr  $\lambda$  nie jest wyznaczony jednoznacznie, bo istnieje dowolność wyboru, który z dwóch punktów stałych przeprowadzić na 0. Wielomian  $z^2+\lambda z$  można przemienić na  $z^2+(2-\lambda)z$ .

Zauważ, że jeśli ciąg  $(f_c^n(0))$  nie jest ograniczony, to  $f_c^n(0) \rightarrow \infty$ .



Rys. 9. Okulary.



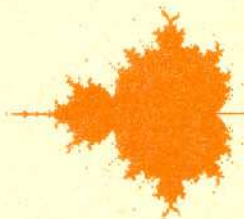
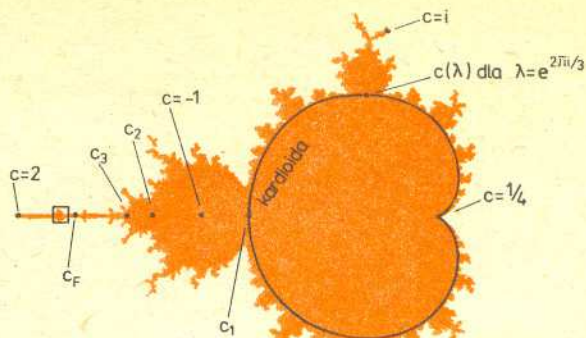
Zajmiemy się teraz kształtem „żuka” Mandelbrota,  $M$  (spójrz na rysunek 11). Do tułowia przyklejone są plamy różnej wielkości, do nich mniejsze plamki itd. Ale to jeszcze nie wszystko, bo dookoła widać sporo czarnych kropek. To nie jest brud, to kropki także należą do zbioru  $M$ . Są nawet połączone z główną częścią „żuka”, ale połączenia są tak cienkie, że nie widać ich na obrazkach z komputera. Można jednak wykonać eksperyment pokazujący nie tylko czarny ład  $M$ , ale także podmorskie, kolorowe grzbiety i skały (długi czas ucieczki punktu 0 do  $\infty$  przy działaniu iteracjami  $f_c$ ). Widać to na powiększeniu fragmentu „żuka” — patrz okładka. Zbiór  $M$  jest spójny, nie ma dziur i jest domknięty. Najciekawsze jest, że wydaje się mieć, podobnie jak zbiory Julii, własność samopodobieństwa. Czarne kropki w powiększeniu okazują się być drugorzędnymi „żukami” o kształcie podobnym do  $M$ . Zbiór  $S^2 \setminus M$  ma mnóstwo fiordów wchodzących w  $M$ . Nie wiadomo, czy każdy punkt  $c$  z brzegu  $M$  jest osiągalny z  $S^2 \setminus M$ , to znaczy czy istnieje ciągła krzywa  $\gamma \subset S^2 \setminus M$  zbieżna do punktu  $c$ .

Przypomnijmy, że dla przekształcenia  $f_c$  przy  $c = 0$  punkt 0 jest punktem stałym, ściekiem. Kiedy  $c$  zmienia się, ten punkt stały przesuwa się (spełnia on równanie  $z^2 + c = z$ ). Oznaczmy go  $z_c$ . Interesujemy się takimi parametrami  $c$ , dla których  $z_c$  przestaje być ściekiem. Zauważ, że  $f'_c(z) = 2z$ , czyli  $|f'_c(z_c)| = 1$ , gdy  $|z_c| = \frac{1}{2}$ . Ponieważ  $c = z_c - z_c^2$ , więc interesujące nas

$$\text{parametry } c = c(\lambda) \text{ układają się na krzywej } c(\lambda) = \frac{\lambda}{2} - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2,$$

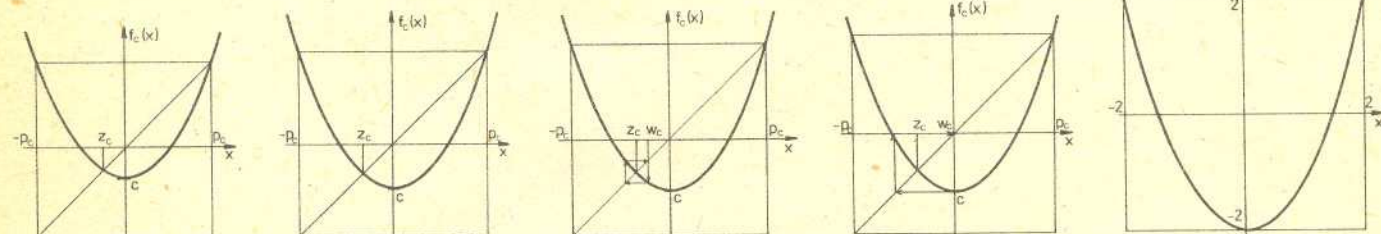
gdzie  $\lambda$  przebiega okrąg  $\{\lambda: |\lambda| = 1\}$ . Tę krzywą, która jest brzegiem tułowia „żuka”, nazywa się kardioidą. Jeśli bierzemy  $c$  wewnątrz tułowia, to zbiór Julii jest topologicznie okręgiem. A co się stanie, gdy  $c$  przekroczy kardioidę?

Zróbmy wycieczkę parametrem  $c$  wzdłuż osi rzeczywistej w  $C$ . Jeśli od  $c = 0$  idziemy w kierunku dodatnim, to dla  $c = 1/4$  przekraczamy kardioidę. Zbiór Julii jest wtedy brzegiem „muszli” (rys. 7), a potem rozsypuje się w „baranki” (rys. 10). Pójdźmy teraz od 0 w kierunku ujemnym. Przekształcenie  $f_c$  przeprowadza liczby rzeczywiste w liczby rzeczywiste. Łatwo więc rysować wykresy, spójrz na rysunek 13.



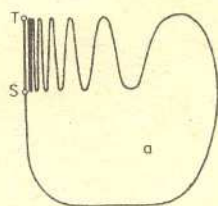
Rys. 11. Zbiór Mandelbrota. W małym kwadraciku jest drugorzędny żuczek.

Celowo oznaczylem pochodną w punkcie stałym symbolem  $\lambda$ , to jest przecież pochodną w punkcie stałym 0 dla przekształceń  $\lambda z(1-z)$  i  $z^2 + \lambda z$ . A więc po odpowiedniej zmianie współrzędnych na  $C$  z tych przekształceń robi się  $z^2 + c(\lambda)$ . Mamy wzór na  $c(\lambda)$ ! Sprawdź, że  $c(\lambda) = c(2-\lambda)$ . Tułowiu żuka odpowiada w zbiorze parametrów  $\lambda$  suma dwóch kół o promieniu 1:  $K_1$  o środku w 0 i  $K_2$  o środku w punkcie 2. Przy rozpatrywaniu rodziny  $z^2 + \lambda z$  robi się zazwyczaj wycieczki parametrem  $\lambda$  zaczynając z  $K_1$  — ściek jest umieszczony w 0. Przy rozpatrywaniu rodziny  $\lambda z(1-z)$  zaczyna się wędrówki z  $K_2$ . Wtedy 0 na stałe jest źródłem, a ściekiem jest drugi punkt stały (rysunek 16, wykres a).

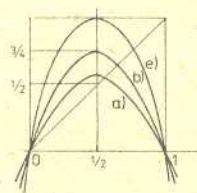


Rys. 13.  
a)  $0 > c > -3/4$   
 $|f'_c(z_c)| < 1$   
b)  $c = -3/4$   
 $f'_c(z_c) = -1$

- c)  $-3/4 > c > -1$   
 $|f'_c(z_c)| > 1$
- d)  $c = -1$   
 $w_c = 0$
- e)  $c = -2$   
chaos

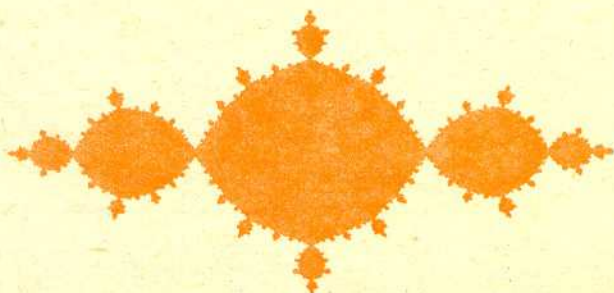
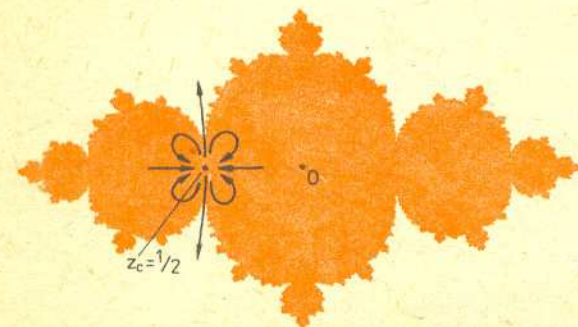


Rys. 12. Odcinek  $ST$  (bez punktu  $S$ ) składa się z punktów nieosiągalnych z  $a$ .

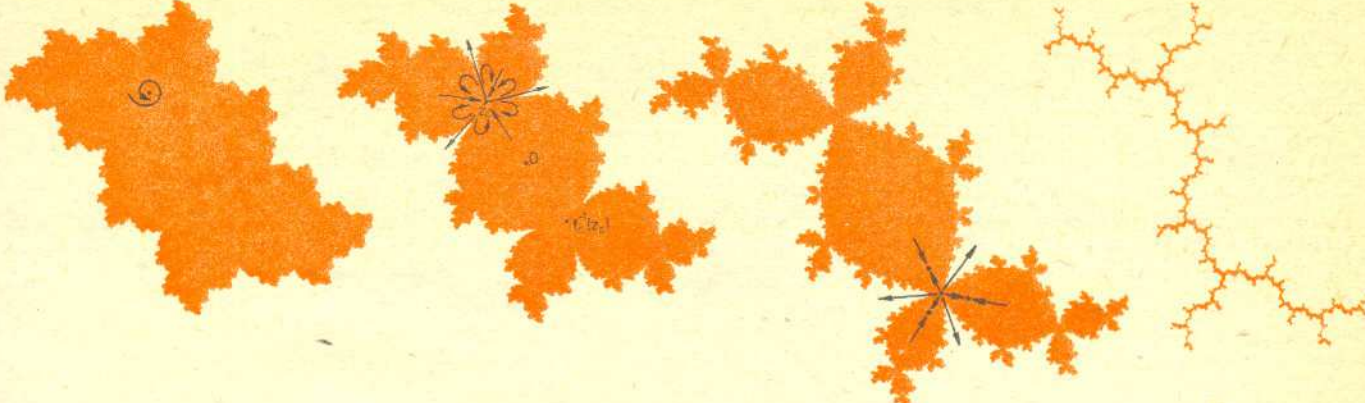


Rys. 14. Podnoszący się garb. (Wykresy przekształceń a), b), e) z rysunku 13 w przedstawieniu  $\lambda x(1-x)$ .)

Rys. 15. Smoki Świętego Marka, czyli zbiory Julii dla wielomianów  $z^2 - 3/4$  i  $z^2 - 1$ . Tę nazwę wymyślił Mandelbrot na część Bazyliki w Wenecji, jej odbicia w zalanym wodą Placu i nieskończonych ekstrapolacji.







Rys. 16.  
 a) przed powstaniem królika,  
 b) powstaje królik,  
 c) królik, (0 jest ściekiem okresu 3,  $c \approx -0,12256117 + 0,74486177 i$  spełnia równanie  $c^3 + 2c^2 + c + 1 = 0$ ),  
 d) zbiór Julii dla  $z^2 + i$ .

Zmiana dynamiki, kiedy  $c$  przechodzi przez wartość  $c_F$ , to bifurkacja Feigenbauma. Na  $c = c_F$  kończą się bifurkacje podwajania okresu, potem na odcinku  $\langle -p_c, p_c \rangle$  zaczyna się chaos. Okazało się, że ta bifurkacja uniwersalna występuje w przyrodzie, jej odkrycie i zbadanie jest jednym z największych osiągnięć matematycznych ostatnich lat. Bardzo ciekawe rzeczy dzieją się między parametrami  $c_F$  i  $-2$ . A co dopiero się dzieje wzdłuż innych odnóży żuka?!

Przy  $c = -3/4$  przechodzimy przez kardioidę. Następuje bifurkacja dynamiki. Zbiór Julii już nie jest topologicznie okręgiem. To „okrąg” sczepiony sam ze sobą w nieskończenie wielu punktach. Otrzymujemy smoka Świętego Marka. Parametr  $c = -3/4$  jest w zbiorze Mandelbrota korzonkiem nowej plamy. Wchodzimy teraz w tę plamę; powstaje ściek  $w_c$  o okresie 2 (punkt  $z_c$  jest teraz źródłem). Dla  $c = -1$  punkt  $w_c$  przechodzi przez 0 na prawo, a po przejściu parametrem  $c$  pewnej wartości  $c_2$ , korzonka następnej plamki,  $w_c$  staje się źródłem, za to blisko powstaje ściek o okresie 4. Po przejściu  $c_3$  powstaje ściek o okresie 8, itd. Ciąg  $c_n$  jest zbieżny do pewnej wartości  $c_F = -1,401...$  (patrz rys. 11). Ale to jeszcze nie koniec! Aż do  $c = -2$  wielomian  $f_c$  przeprowadza odcinek  $\langle -p_c, p_c \rangle$  w siebie ( $p_c$  jest drugim obok  $z_c$  punktem stałym); trajektoria  $f_c^n(0)$  jest więc ograniczona. Zatem  $c \in M$  dla  $c \geq -2$  (i  $c \leq -1/4$ ). Dla  $c = -2$  zbiór  $J(f_c)$  jest odcinkiem  $\langle -2, 2 \rangle$ . Jest to jedna z dwóch wartości parametru  $c$  (drugą jest 0), gdy  $J(f_c)$  ma klasyczny kształt. Dopiero przy  $c < -2$  zbiór  $J(f_c)$  rozszypuje się.

Zróbmy wycieczkę wzdłuż kardioidy. Dla każdej liczby  $\lambda$ , będącej pierwiastkiem z 1, punkt  $c(\lambda)$  jest korzonkiem pewnej plamki, która wyrasta z kardioidy. Rozważmy przykład  $\lambda = e^{2\pi i/3}$ . Przy przejściu przez ten korzonek z tulowia do plamy punkt stały ze ścieku zmienia się w źródło, a od niego oddziela się trajektoria nowego ścieku o okresie 3. Następuje bifurkacja „kwiatka” — powstaje królik (rys. 16).

Po przejściu przez inne korzonki  $c(\lambda)$ , gdzie  $\text{Arg}(\lambda) = \frac{2\pi}{n}$  i liczba  $n$  jest niezbyt duża, powstają smoki Mandelbrota (rys. 17).

Gdy  $n$  rośnie, smokowi przybywa ramion i jego kształt dąży do kształtu muszli (spójrz na rysunki 18 i 7).

Dla liczb  $c(\lambda)$ , dla których  $\frac{1}{2\pi} \text{Arg}(\lambda)$  wolno aproksymuje się liczbami wymiernymi, istnieje dysk Siegela (rys. 19).

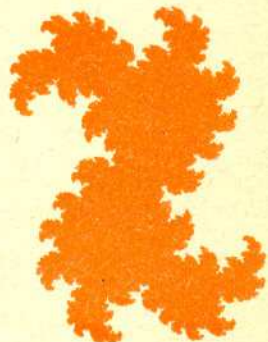
Dla wielomianu  $z^2 + c$  może istnieć w  $\mathbb{C}$  najwyżej jedna trajektoria ścieku. Jeśli istnieje, to jedyny w  $\mathbb{C}$  punkt krytyczny, 0, leży w jej basenie przyciągania. Każda poznana dotychczas za pomocą komputerów plamka zbioru  $M$  jest właśnie związana z istnieniem okresowego ścieku. Jeśli jednak  $0 \in J(f_c)$ , to albo w naszym smoku istnieje dysk Siegela, albo smok ma puste wnętrze, jest bardzo głodny (ale jeszcze spójny!). Parametry  $c$ , dla których istnieje dysk Siegela lub kwiatek (ogólniej: jakiś punkt neutralny) leżą na brzegu  $M$ . Można je mało zmienić i uzyskać pył. Nie wiadomo jednak, czy można zepsuć każdego zagłodzonego smoka. Może istnieje w  $M$  cała plama parametrów, którym odpowiadają takie biedne smoki?



Rys. 17. Smok siedmioramienny.  $\text{Arg} \lambda = 2\pi/7$ . Przekształcenie  $f_c$  przeprowadza ramię 1 na ramię 2, 2 na 3 itd., ramię 6 na ogromne ramię 7. A na co przechodzi ramię 7? Otóż, składa się ono z ramion 1', ..., 6', symetrycznych do 1, ..., 6, które także przechodzą na 2, ..., 7, oraz z ramionek  $a, b$ , które przechodzą na 1.



Rys. 18. Smok dwudziestoramienny.



Rys. 19. Zwierz z dyskiem Siegela  $f(z) = z^2 + e^i z$  ( $\text{Arg} \lambda = 1$ ).



Rys. 20. Zagłodzony smok. (Po przejściu nieskończenie wielu bifurkacji uwielokrotnienia okresu ścieku smok traci całe wnętrze i zostaje z niego tylko szkielet, odzyska jeszcze trochę ciała w drugorzędnych żukach.)

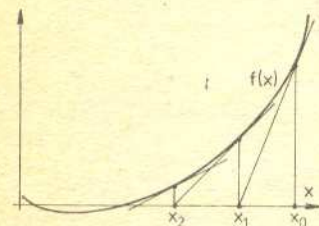


Istnieje pewna operacja  $\perp$  na parach „zwierzaków” (przyporządkowuje parze  $z^2 + c_1$ ,  $z^2 + c_2$  nowy wielomian  $z^2 + c_3$ ), popatrz na rysunek 21.

Czytelniku, może teraz sam obliczysz na komputerze jakiegoś smoka?

### Metoda Newtona

Na pewno zetknąłeś się Czytelniku z tą nadzwyczaj efektywną metodą obliczania pierwiastków wielomianu. Tak jak na rysunku 22 tworzy się dla każdej „rozsądnej” liczby  $x_0$  ciąg liczb  $x_n$ .



Rys. 22. Metoda Newtona.

Okazuje się, że ciąg  $x_n$  bardzo szybko dąży do pierwiastka. A co to znaczy „rozsądna” liczba  $x_0$ ? Czy każda lub prawie każda liczba jest rozsądna? Teoria iteracji przekształceń wymiernych i wyniki komputerowych eksperymentów pozwalają przybliżyć się do odpowiedzi na te pytania. Widać, na podstawie rysunku 22, że  $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ . Należy więc badać iteracje funkcji wymiernej

$$Nf(x) = x - f(x)/f'(x).$$

Będziemy to robić w płaszczyźnie zespolonej  $\mathbb{C}$ . Zera wielomianu  $f$  to dokładnie punkty stałe, ścieki, dla funkcji  $Nf$ , a zera jednokrotne są zarazem punktami krytycznymi (bo  $(Nf)'(z) = f(z)f''(z)/(f'(z)^2)$ ).

Zbadajmy przykład  $f(z) = z^2 + 1$ . Dla tego przykładu ściekami dla  $Nf(z) = \frac{1}{2}(z - 1/z)$  są punkty  $-i, i$ . Ich baseny przyciągania to odpowiednio półpłaszczyzna dolna i górna. (Żeby się o tym przekonać, zauważ, że jeśli zmienimy współrzędne na sferze  $S^2$  przekształceniem  $T(z) = (z+i)/(z-i)$ , to  $T \circ Nf \circ T^{-1}(z) = z^2$ , a oś rzeczywista przechodzi na okrąg  $S^1$ .) A więc dla prawie każdej liczby zespolonej  $x_0$  (każdej nie rzeczywistej) zastosowanie metody Newtona daje zbieżność do pewnego pierwiastka. Dla dowolnego wielomianu stopnia 2 sytuacja jest podobna.

A co się dzieje dla wielomianów stopnia 3? Zbadajmy najpierw wielomian  $f(z) = z^3 - 1$ . Ścieki dla  $Nf(z) = \frac{1}{3}(2z + 1/z^2)$  (czyli

zera dla  $f$ ) to punkty  $z_0 = 1, z_1 = -1/2 + i\sqrt{3}/2, z_2 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$ . Punkty krytyczne dla  $Nf$  to znowu  $z_0, z_1, z_2$  i dodatkowo punkt 0. Zbiór Julii nie jest już teraz taki prosty. Na rysunku 24 przedstawiony jest biały kolorem basen przyciągania dla punktu  $z_0 = 1$ . Dla  $z^3 - 1$  metoda Newtona jest dobra dla prawie każdego punktu  $x_0 \in \mathbb{C}$ , bo prowadzi do pierwiastka. Faktycznie, oprócz basenów przyciągania ścieków  $z_0, z_1, z_2$  nie ma żadnych innych składowych uzupełnienia zbioru Julii  $J(Nf)$ . Nie ma po prostu punktu krytycznego, który mógłby taką składową obsłużyć. Jedyne punkty krytyczne, który byłby kandydatem, punkt 0, grzęźnie w źródle  $\infty$  (bo  $Nf(0) = \infty$ ).

A jeśli weźmiemy inny wielomian stopnia 3? Czy może pojawić się nowy ściek okresowy (o okresie  $\geq 2$ )? Może! Rysunki 24—26 dotyczą wielomianów  $f_c(z) = z^3 + (c-1)z - c$ . Na czarno przedstawiony jest zbiór tych parametrów  $c$ , dla których punkt krytyczny 0 zbiega do ścieku w punkcie 1 (dla iteracji  $Nf_c$ ). Składowe obszary w zbiorze parametrów  $c$  (białe), dla których zachodzi zbieżność do dwóch pozostałych pierwiastków  $f$ , tworzą z czarnymi składowymi charakterystyczne trójki. W trakcie kolejnych powiększeń ukazuje się jednak jeszcze jakiś dziwny twór: to przecież żuk Mandelbrota. Dla parametru  $c$  z wnętrza takiego żuka istnieje ściek o okresie  $\geq 2$ . Dla żadnego punktu  $x_0$  z basenu przyciągania takiego ścieku metoda Newtona nie jest dobra. Ciąg  $x_n$  zamiast przybliżać się do pierwiastka wielomianu  $f_c$  zaczyna oscylować!



Rys. 21. a) smok Św. Marka  $\perp$  królik,

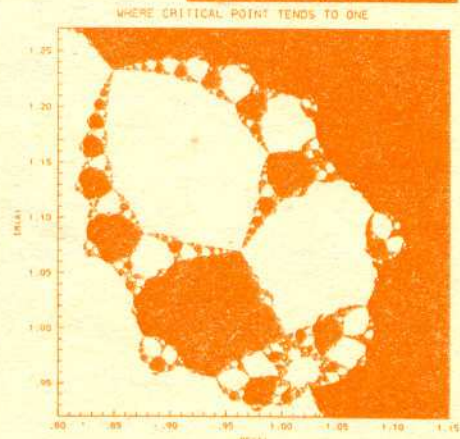
b) królik  $\perp$  smok Św. Marka.



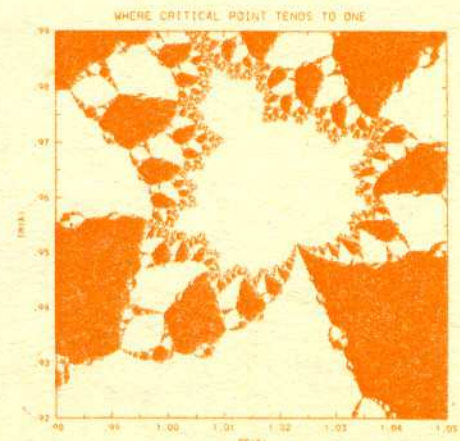
Rys. 23. Kraby (punkty, w których każdy krab trzyma tył innego kraba, leżą na trajektoriach (w tył) punktu krytycznego 0).



Rys. 24



Rys. 25



Rys. 26