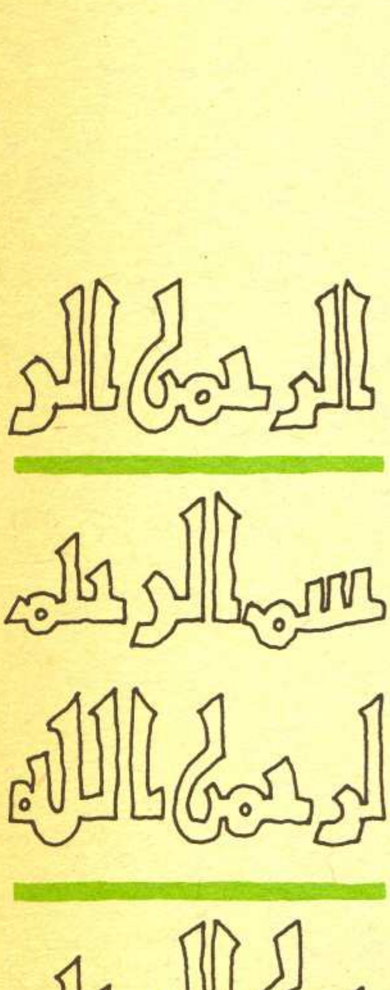
O pewnej metodzie dowodzenia nierówności

Piotr HAJŁASZ

Jest to skrót pracy nagrodzonej złotym medalem w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1985 r.



Praca nadesłana na Konkurs dotyczy nowej metody dowodzenia pewnych nierówności. W niniejszym skrócie umieszczam jedynie ważniejsze twierdzenia (bez dowodów) i niektóre ich zastosowania. Oto główna idea mojej metody.
Chcąc udowodnić nierówność postaci

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leqslant g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

postępujemy w następujący sposób: Rozpatrujemy jedną stronę nierówności, np. $g(x_1, \dots, x_n)$, i dokonujemy kolejnych zmian wartości zmiennych (za każdym razem zmieniamy wartości tylko dwóch zmiennych). Ten proces zmian kontynuujemy w nieskończoność, przy czym zmiany te są tak dobrane, że za każdym razem funkcja f nie zmienia swojej wartości, funkcja g zaś przyjmuje coraz mniejsze wartości i ten malejący ciąg wartości funkcji g jest zbieżny do wartości funkcji f.

Przystąpmy teraz do precyzyjnego przedstawienia tej metody. Na wstępie podamy kilka pojęć o charakterze ogólnym.

Definicja. Weźmy pod uwagę ciągłą funkcję $\varphi\colon P \to \mathbf{R}$, gdzie P jest podzbiorem płaszczyzny $\mathbf{R}^2$.
a) Jeżeli dla każdego punktu $(x, y) \in P$ liczba $\varphi(x, y)$ leży w przedziale domkniętym o końcach x i y, to funkcję φ nazywamy **medianą**.

b) Jeżeli dla każdego punktu $(x, y) \in P$, gdzie $x \neq y$, liczba $\varphi(x, y)$ leży w przedziale otwartym o końcach x i y, to funkcję φ nazywamy medianą **właściwą** (założenie $x \neq y$ jest tutaj konieczne).

Następujące funkcje

$$\varphi(x, y) = \frac{x+y}{2} \qquad x, y \in \mathbf{R},$$

$$\psi(x, y) = \sqrt{xy} \qquad x, y \geqslant 0,$$

$$\eta(x, y) = \left(\frac{x^p+y^p}{2}\right)^{1/p} \qquad x, y \geqslant 0, p > 0$$

są medianami. Funkcje φ i η są medianami właściwymi. Jeżeli dziedzinę funkcji ψ ograniczymy do zbioru $\{(x, y) : x, y > 0\}$, to ψ też będzie medianą właściwą.

Niech $\varphi : A \to \mathbf{R}$ będzie medianą, a punkt $(x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbf{R}^n$ będzie taki, że kwadrat o wierzchołkach (m, m), (m, d), (d, m), (d, d), gdzie $m = \min\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$, $d = \max\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$, jest zawarty w A.

Projekcją punktu $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ względem mediany φ nazywamy dowolny ciąg punktów $X_k = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbf{R}^n$ spełniający warunek:

dla każdego $k = 0, 1, 2, \dots$ istnieje taka para indeksów i, j, gdzie $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, że

$$x_i^{(k+1)} = x_j^{(k+1)} = \varphi(x_i^{(k)}, x_j^{(k)})$$

oraz

$$x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)} \qquad \text{gdy } i \neq r \neq j.$$

Tak więc X_{k+1} powstaje z X_k przez „uśrednienie" współrzędnych $x_i^{(k)}$ i $x_j^{(k)}$ za pomocą mediany φ.

Jeżeli za każdym razem uśredniamy najmniejszą i największą współrzędną, to projekcję nazywamy **ekstremalną**.

Jeżeli dla dowolnego podziału zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ na niepuste podzbiory A, B i każdej liczby naturalnej k_0 istnieje taka liczba $k > k_0$, że X_{k+1} powstaje z X_k przez uśrednienie $x_i^{(k)}$ i $x_j^{(k)}$, gdzie $i \in A$, $j \in B$, to projekcję nazywamy **normalną**.

W pracy udowodniłem m.in. twierdzenia:

Twierdzenie 1. Projekcja ekstremalna jest zbieżna w $\mathbf{R}^n$ do punktu postaci $(x_0, x_0, \dots, x_0) \in \mathbf{R}^n$.

Twierdzenie 2. Projekcja normalna względem mediany właściwej jest zbieżna w $\mathbf{R}^n$ do punktu postaci $(x_0, x_0, \dots, x_0) \in \mathbf{R}^n$.

Łatwo wykazać, że liczba x_0 występująca w obu twierdzeniach ma dla podanych poprzednio funkcji φ, ψ, η następujące wartości:

$$\frac{x_1+\dots+x_n}{n}, \qquad \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}, \qquad \left(\frac{x_1^p+\dots+x_n^p}{n}\right)^{1/p}.$$

Teraz już możemy przystąpić do dowodzenia nierówności.

Zadanie 1. Udowodnić, że jeżeli $a_1, \dots, a_n \geqslant 0$, to

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leqslant \frac{a_1+\dots+a_n}{n}.$$

Dowód. Niech $\varphi(x, y) = \dfrac{x+y}{2}$. Jak wiadomo, $xy \leqslant \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 = \varphi(x, y)\cdot\varphi(x, y)$.

Stąd dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, jest

$$(1) \qquad \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_i \cdot \ldots \cdot x_j \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot \varphi(x_i, x_j) \cdot \ldots \cdot \varphi(x_i, x_j) \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Niech $(A_k)_{k=0}^{\infty}$ będzie projekcją ekstremalną punktu $(a_1, \ldots, a_n)$ względem mediany φ. Oznaczając $f(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$ mamy na mocy (1)

$$f(A_k) \leqslant f(A_{k+1}) \qquad \text{dla } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ponieważ $A_k \to (a_0, \ldots, a_0)$, gdzie $a_0 = \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$, więc na mocy ciągłości funkcji f mamy

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = f(A_0) \leqslant f(A_k) \leqslant \lim_{k\to\infty} f(A_k) = f(a_0, \ldots, a_0) = a_0 = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n},$$

czyli to, co mieliśmy udowodnić.

Zadanie 2. Udowodnić, że jeżeli $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, to

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \leqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}}.$$

Dowód. Niech $\varphi(x, y) = \sqrt{xy}$. Otóż, jeżeli $x, y \in [0, 1]$, to

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \leqslant \frac{1}{1+\varphi(x, y)} + \frac{1}{1+\varphi(x, y)}.$$

Nierówność ta wynika dość prosto z nierówności

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\,(1-\sqrt{xy}) \geqslant 0.$$

Stąd dla dowolnych $y_1, \ldots, y_n \in [0, 1]$ i $1 \leqslant i < j \leqslant n$ jest

$$(2) \qquad \frac{1}{1+y_1} + \ldots + \frac{1}{1+y_i} + \ldots + \frac{1}{1+y_j} + \ldots + \frac{1}{1+y_n} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{1+y_1} + \ldots + \frac{1}{1+\varphi(y_i, y_j)} + \ldots + \frac{1}{1+\varphi(y_i, y_j)} + \ldots + \frac{1}{1+y_n}.$$

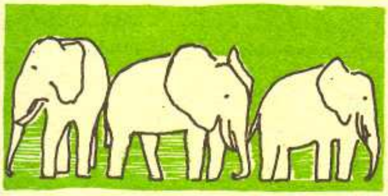
Niech $(X_k)_{k=0}^{\infty}$ będzie projekcją ekstremalną punktu $(x_1, \ldots, x_n)$ względem mediany φ.
Przyjmując, że $f(y_1, \ldots, y_n) = \dfrac{1}{1+y_1} + \ldots + \dfrac{1}{1+y_n}$ mamy na mocy (2)

$$f(X_k) \leqslant f(X_{k+1}) \qquad \text{dla } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Podobnie jak w zadaniu 1 mamy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} = f(X_0) \leqslant f(X_k) \leqslant \lim_{k\to\infty} f(X_k) = f(x_0 \ldots x_0) = \frac{n}{1+x_0} = \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}},$$

czyli to, co mieliśmy udowodnić.



Zadanie 3 (nierówność Höldera). Udowodnić, że jeżeli $a_i, b_i > 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz liczby dodatnie p i q spełniają równość $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, to

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\Big)^{1/q}.$$

Dowód (częściowy). Niech

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{x^p+y^p}{2}\right)^{1/p}, \qquad \psi(x, y) = \left(\frac{x^q+y^q}{2}\right)^{1/q}.$$

Wówczas można wykazać (dowód pomijam; w przypadku $p = q = 2$ jest on szczególnie prosty — w tym szczególnym przypadku dowodzona przez nas nierówność nosi nazwę nierówności Schwarza), że jeśli $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$, to
$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 \leqslant \varphi(\alpha_1, \alpha_2)\,\psi(\beta_1, \beta_2) + \varphi(\alpha_1, \alpha_2)\,\psi(\beta_1, \beta_2)$.

Stąd dla dowolnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n > 0$ i dowolnych $1 \leqslant i < j \leqslant n$ jest

$$(3) \qquad \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_i\beta_i + \ldots + \alpha_j\beta_j + \ldots + \alpha_n\beta_n \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_1\beta_1 + \ldots + \varphi(\alpha_i, \alpha_j)\psi(\beta_i, \beta_j) + \ldots + \varphi(\alpha_i, \alpha_j)\psi(\beta_i, \beta_j) + \ldots + \alpha_n\beta_n.$$

Rozwiązanie zadania M 429. Mamy

$$k^4+3k^2+1 = (k^3+2k)k + (k^2+1),$$
$$k^3+2k = (k^2+1)k + k,$$
$$k^2+1 = k\cdot k + 1.$$

Zauważmy, że każdy wspólny dzielnik liczb k^4+3k^2+1 i k^3+2k jest dzielnikiem k^2+1, oraz że każdy wspólny dzielnik liczb k^3+2k i k^2+1 jest dzielnikiem k^4+3k^2+1. Tak więc $\mathrm{NWD}(k^4+3k^2+1, k^3+2k) = \mathrm{NWD}(k^3+2k, k^2+1)$.
Podobnie otrzymujemy
$\mathrm{NWD}(k^3+2k, k^2+1) = \mathrm{NWD}(k^2+1, k) = \mathrm{NWD}(k, 1)$.
Ale $\mathrm{NWD}(k, 1) = 1$, czyli liczby k^4+3k^2+1 i k^3+2k są względnie pierwsze.

Niech $(A_k)_{k=0}^{\infty}$ będzie projekcją normalną punktu $(a_1, \ldots, a_n)$ względem mediany φ. Konstruujemy teraz projekcję $(B_k)_{k=0}^{\infty}$ punktu $(b_1, \ldots, b_n)$ względem mediany ψ: jeśli A_{k+1} powstał z A_k przez uśrednienie współrzędnych $a_i^{(k)}$ oraz $a_j^{(k)}$, to B_{k+1} powstaje z B_k przez uśrednienie współrzędnych $b_i^{(k)}$ oraz $b_j^{(k)}$. Oczywiście, projekcja (B_k) też jest normalna.
Wówczas

$$A_k \to (a_0 \ldots, a_0), \qquad a_0 = \left(\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{1/p},$$

$$B_k \to (b_0 \ldots, b_0), \qquad b_0 = \left(\frac{b_1^q + \ldots + b_n^q}{n}\right)^{1/q}.$$

Oznaczając

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_n) = \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n$$

mamy zgodnie z (3)

$$f(A_k; B_k) \leqslant f(A_{k+1}; B_{k+1}) \qquad \text{dla } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Stąd i z ciągłości funkcji f mamy

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = f(A_0; B_0) \leqslant \lim_{k\to\infty} f(A_k; B_k) = f(a_0, \ldots, a_0; b_0, \ldots, b_0) =$$

$$= n\left(\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{1/p}\left(\frac{b_1^q + \ldots + b_n^q}{n}\right)^{1/q} = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\Big)^{1/q}.$$

Przy dowodzeniu różnych nierówności stosowaliśmy różne mediany. Skąd wiadomo, jaką medianę zastosować przy dowodzie konkretnej nierówności? Nierówności dowodzone w zadaniach 1 i 2 są postaci

$$(4) \qquad f_n(a_1, \ldots, a_n) \leqslant g_n(a_1, \ldots, a_n) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Otóż można uzasadnić, że jeżeli taka nierówność da się udowodnić wyżej prezentowaną metodą, to mediana φ musi spełniać warunek

$$(5) \qquad f_2(\varphi(x, y), \varphi(x, y)) = g_2(x, y)$$

(w przypadku zadań 1 i 2 mediana φ rzeczywiście spełnia ten warunek). Tak więc chcąc udowodnić nierówność (4) wpierw wyznaczamy medianę z warunku (5).
Nie zawsze jednak nierówność (4) daje się udowodnić wyżej opisaną metodą.

W przypadku zadania 3 sytuacja jest trochę inna, gdyż występująca tam nierówność nie jest nierównością typu (4). Można się jednak dopatrzyć dużych podobieństw i uogólnić warunek (5) na inne rodzaje nierówności.

Prezentowana metoda dowodzenia nierówności nadaje się do dowodzenia nierówności innych typów (oczywiście nie wszystkich), można bowiem z powodzeniem znajdować jej modyfikacje.

Zadania

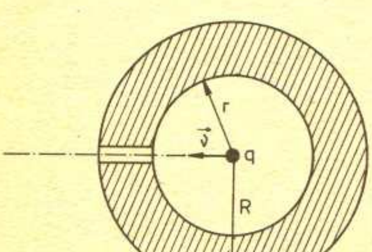
Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 427. W wierzchołku trójkąta stoi pionek. Przestawiamy go do losowo wybranego jednego z pozostałych wierzchołków (szanse wyboru każdego spośród dwóch sąsiednich wierzchołków są równe). Niech p_n oznacza prawdopodobieństwo tego, że po n krokach pionek stoi w wyjściowym wierzchołku. Znaleźć $\lim_{n\to\infty} p_n$.
Rozwiązanie na str. 5

M 428. Na kuli o promieniu r opisano wielościan o polu powierzchni S. Znaleźć jego objętość.
Rozwiązanie na str. 6

M 429. Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej k liczby k^3+2k i k^4+3k^2+1 są względnie pierwsze.
Rozwiązanie na str. 13

Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ



F 192. Wewnątrz umocowanej, przewodzącej, nie naładowanej kuli o promieniu R znajduje się kuliste wydrążenie o promieniu r, którego środek pokrywa się ze środkiem kuli. Jaką minimalną prędkość należy nadać znajdującej się w środku kuli cząstce o masie m i ładunku q, aby po przejściu przez wąski otwór w kuli odleciała w nieskończoność?
Rozwiązanie na str. 5

F 193. Kulkę metalową oświetlono światłem o częstości ν większej od częstości granicznej dla zjawiska fotoelektrycznego. Kulka znajduje się w próżni, a jej promień wynosi r. Jaki ładunek ustali się na kulce, jeżeli praca wyjścia dla metalu, z którego jest ona wykonana, wynosi W?
Rozwiązanie na str. 4