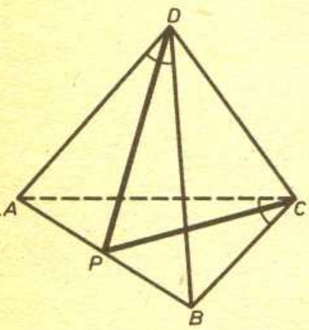
Zadanie — pułapka

Mgr Piotr MORMUL

W szkole czasami zdarzają się zadania, w których nauczyciel nie przewidział pewnych dodatkowych wariantów rozwiązania, stawiających niekiedy pod znakiem zapytania kategoryczność stwierdzeń z treści samego zadania. Jeśli takie zadanie z „drugim dnem" nauczyciel podaje świadomie, chodzi mu o zastawienie swoistej pułapki na uczniów. Jeśli jednak nieświadomie, to mimowolnie zastawia też pułapkę na siebie. Do zupełnych wyjątków należą takie zadania na prawdziwych zawodach matematycznych, jakimi są Olimpiady Matematyczne. Kronikarze amatorzy wspominający dawniejsze Olimpiady nie mogli sobie przypomnieć takich pułapek nieświadomie zastawionych na uczniów — zawodników. Ślepy los zadecydował, że taka pułapka znalazła się w finale XXV krajowej Olimpiady w roku szkolnym 1973/74. Wspomnienie to spisane jest przez byłego zawodnika.

Pierwszy dzień zawodów finałowych otworzyło następujące zadanie geometryczne:

W czworościanie $ABCD$ krawędź $\overline{AB}$ jest prostopadła do krawędzi $\overline{CD}$ i $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$. Udowodnić, że płaszczyzna wyznaczona przez krawędź $\overline{AB}$ i środek krawędzi $\overline{CD}$ jest prostopadła do krawędzi $\overline{CD}$.



Rys. 1

Przyjrzyjmy się, jak w naturalny sposób rozwiązywała to zadanie zdecydowana większość zawodników, nie wyłączając wspominającego tamte zawody.

Zaczynano zwykle od rysunku. Po wykonaniu szkicu czworościanu (rys. 1) zastanawiano się, w który punkt P na krawędzi $\overline{AB}$ rzutuje się prostokątnie (założenie!) cała krawędź $\overline{CD}$. Następnie dorysowując odcinki $\overline{PC}$ oraz $\overline{PD}$ (wysokości odpowiednich ścian czworościanu!) starano się udowodnić ich równość. Do tego bowiem instynktownie skłaniało założenie o równości kątów $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$. I istotnie, taki rysunek narzucał sformułowanie nowej, IV „cechy przystawania trójkątów":

Trójkąty mające jednakowe podstawy i kąty leżące naprzeciw nich oraz jednakowo położone spodki wysokości opuszczonych na te podstawy są przystające.

Teraz każdy potrafiłby sam kontynuować rozumowanie. Mianowicie, w trójkątach przystających wysokości opuszczone na odpowiadające sobie boki są równe, zatem $|\overline{PC}| = |\overline{PD}|$. Oznaczając przez Q środek krawędzi $\overline{CD}$ otrzymywano, iż PQ jest symetralną odcinka $\overline{CD}$. Prosta CD okazywała się zatem być prostopadła i do AB (z założenia), i do PQ. Także więc — prostopadłą do płaszczyzny rozpiętej na tych dwóch prostych AB oraz PQ, a o to przecież chodziło w zadaniu olimpijskim.

Takie też rozwiązanie przedstawił jeden z zawodników, ochotnik, na tradycyjnym spotkaniu — herbatce po południu drugiego dnia zawodów finałowych.

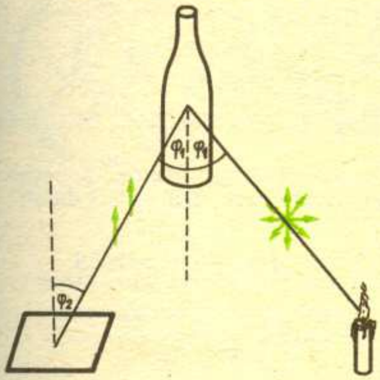
Spośród tych, którzy rozwiązali to zadanie błędnie, gdyż nie dostrzegali owego ukrytego drugiego dna, nie wszyscy zapewne postępowali dokładnie w sposób powyżej opisany. Wśród 71 uczestników zawodów finałowych było też kilku, którzy to drugie dno dostrzegli i w swoich rozważaniach na temat zadania doszli do konkluzji, że w tym sformułowaniu jego teza jest po prostu fałszywa. We wspomnieniach innych jeszcze uczestników zawodów powtarza się liczba co najmniej czterech olimpijczyków, którzy tak właśnie postąpili.

Niektórzy z uczestników, którym podczas pierwszego dnia zawodów nie dopisała wyobraźnia geometryczna, sami przemyśleli lub dowiedzieli się o swym błędzie do poranka następnego dnia. W szczególności rano przed drugim dniem zawodów w grupie uczniów z klas matematycznych Liceum im. Gottwalda w Warszawie trwała gorączkowa dyskusja nad tym właśnie zadaniem. Chyba nikt z gottwaldowców nie zauważył pierwszego dnia tej mimowolnie ukrytej w zadaniu pułapki...

Czytelnik domyśla się już zapewne, gdzie był pies pogrzebany. Istotnie, nie ma takiej IV cechy przystawania trójkątów, jak wspomniana powyżej i opatrzona cudzysłowem. Zapytajmy, kiedy taka „cecha" nie jest prawdziwa. Otóż tylko wtedy, gdy spodek wysokości P leży na prostej AB poza samą krawędzią $\overline{AB}$, choć i wtedy może się zdarzyć, że teza naszego zadania będzie spełniona. Kąt przy wierzchołku A lub B w trójkątach ABC oraz ABD musi wówczas być rozwarty, a więc równe kąty $\sphericalangle ACB$ oraz $\sphericalangle ADB$ muszą być ostre, tzn. wpisane w łuk okręgu dłuższy niż połowa okręgu (rys. 2). Dla czworościanów bardziej przysadzistych, z tymi dwoma kątami prostymi lub rozwartymi, teza zadania jest w całej rozciągłości prawdziwa. Wymienione kąty są wtedy wpisane w łuk będący nie więcej niż połową okręgu. Oznacza to, że punkt P może wtedy leżeć tylko wewnątrz krawędzi $\overline{AB}$, a prostopadła przezeń poprowadzona może tylko w jednym miejscu przeciąć taki łuk. Nie ma wtedy dwóch możliwości dla punktów C i D. Natomiast — podkreślmy to spostrzeżenie — przy wspomnianych kątach ostrych wysokości $\overline{PC}$ oraz $\overline{PD}$ mogą różnić się diametralnie, właśnie na przykład tak jak na rysunku 2.

Rozwiązanie zadania M 438. Niech $w_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$. Gdyby a było pierwiastkiem wielokrotnym w_n, to byłoby pierwiastkiem pochodnej tego wielomianu, $w_n'(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = w_{n-1}(x)$. Mielibyśmy $w_n(a) = 0$, $w_{n-1}(a) = 0$, skąd $\frac{a^n}{n!} = 0$. Wtedy jednak $w_n(a) = 1$ — sprzeczność.

Rozwiązanie zadania F 196. Nieregularny kształt butelki wyklucza możliwość wyznaczenia współczynników na podstawie obserwacji załamania światła. Zadanie najlepiej rozwiązywać znajdując kąt padania, dla którego promień odbity jest całkowicie spolaryzowany (kąt Brewstera). W układzie przedstawionym na rysunku można wyznaczyć kąty Brewstera jednocześnie dla szkła butelki i szkła płytki.



Należy tak dobrać konfigurację płytki, butelki i świeczki, by pionowy refleks płomienia świecy widziany na butelce znikał po odbiciu w płytce. Wtedy kąty φ_1 i φ_2 będą odpowiednimi kątami Brewstera, na podstawie których można wyznaczyć współczynniki załamania. W metodzie tej korzysta się z faktu, iż promień światła odbity pod kątem Brewstera jest całkowicie spolaryzowany.

Rozwiązanie zadania M 434. Przypuśćmy, że (a_n) jest rosnącym ciągiem wszystkich liczb naturalnych, które nie mają zera w rozwinięciu dziesiętnym. Rozpatrzmy liczby z ciągu (a_n), które mają k cyfr. Jest ich 9^k, wśród nich 9^{k-1} zaczyna się od ustalonej cyfry c. Suma odwrotności liczb, zaczynających się od cyfry c jest nie większa niż

$$9^{k-1}\cdot\frac{1}{c\cdot 10^{k-1}}.$$

W takim razie suma odwrotności liczb k-cyfrowych jest nie większa niż

$$\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\leqslant\frac{29}{10}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$$

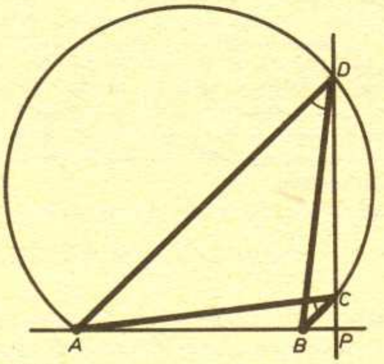
i ostatecznie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\leqslant\frac{29}{10}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}=$$

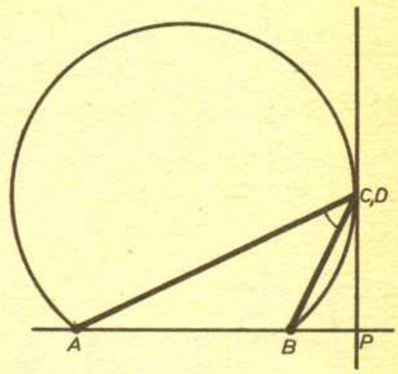
$$=\frac{29}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{9}{10}}=29 \text{ c.n.d.}$$

Nie ma wtedy mowy o tym, by PQ była symetralną krawędzi $\overline{CD}$. Nie ma więc też wtedy prostopadłości CD do PQ. Prosta CD nie może wówczas być prostopadła do całej płaszczyzny rozpiętej na prostych AB oraz PQ — i teza zadania okazuje się wtedy fałszywa.

Jaki jednak wyjątek mieliśmy na myśli, kiedy to nawet przy ostrych, równych kątach $\sphericalangle ACB$ oraz $\sphericalangle ADB$ można całe zadanie uratować?



Rys. 2



Rys. 3

Okazuje się, że wspólny spodek P dwóch wysokości może znajdować się na prostej AB, poza odcinkiem $\overline{AB}$, w miejscu szczególnym. Dającym mianowicie styczność prostopadłej do AB przez P do łuku opartego na cięciwie $\overline{AB}$, z którego $\overline{AB}$ widać pod wspomnianym kątem (oczywiście ostrym). Jest to uwidocznione na rysunku 3. Widzimy, że wtedy możliwa jest (szczęśliwie) jedna tylko wysokość opuszczona na AB dla trójkątów ABC oraz ABD. A to, jak wiemy, stanowi tu sedno. Dla pewnych, w specjalny sposób pochylonych czworościanów z ostrym kątem $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ teza zadania olimpijskiego zachodzi więc również.

Cóż działo się dalej podczas wspomnianej herbatki pod koniec drugiego dnia zawodów? (Zawodnicy mogą na takich herbatkach dyskutować między sobą, uczestniczący zaś w herbatce członkowie Komitetu Głównego Olimpiady nie zawsze komentują od siebie rozwiązania uczniów.)

Gdy Ochotnik przedstawił przytoczoną tu w przybliżeniu, połowiczną analizę zadania, grupa zawodników z Liceum Gottwalda nie czekała już dłużej z ujawnieniem swojej znajomości drugiego dna w tym zadaniu. Jeden z gottwaldowców zgłosił się od razu do dyskusji i zaczął wyjaśniać słaby punkt w rozwiązaniu Ochotnika. Wtedy oczywiście włączyli się do wymiany zdań przedstawiciele Komitetu Głównego, którzy otwarcie stwierdzili, że do tej pory nie zauważyli pułapki. Takie oświadczenie spowodowało odprężenie wśród zawodników. Zaczęły się jednak spekulacje na temat oceny rozwiązań. Gwoli kronikarskiej dokładności trzeba stwierdzić, że matematycy z Komitetu Głównego nie dali od razu za wygraną i zaczęli sprawdzać poprawność wniosków zawodnika-gottwaldowca. Wtedy włączył się z sali ktoś z tej samej „silnej grupy". Oświadczył on kategorycznie, że potrafi analitycznie określić czworościan, dla którego teza zadania nie będzie prawdziwa, co też w chwilę później uczynił. Równocześnie Komitet Główny też był już pewny swojego niedopatrzenia. Ogłoszono, że najwyżej punktowane będą rozwiązania pełne, wskazujące na możliwość niezachodzenia tezy zadania.

Najciekawsze jest to, że co najmniej czterej zawodnicy przeprowadzili w tym zadaniu pełną analizę już w czasie zawodów i uwidocznili ją w swoich rozwiązaniach. Jak to często jednak zdarza się w życiu, nie oni nadawali ton dyskusjom na przyolimpijskiej giełdzie i podczas herbatki. W prywatnych rozmowach z zawodnikami z Liceum Gottwalda stwierdzali tylko rzeczowo, iż nie rozumieją tak dużego podniecenia towarzyszącego temu zadaniu; po prostu okazało się częściowo nieprawdziwe i tyle.

Gdy teraz, po ponad 11 latach, pochylamy się nad żółknącym już tomikiem sprawozdań Komitetu Głównego z XXV Olimpiady Matematycznej, odnajdujemy tam m.in. statystykę rozwiązań poszczególnych zadań. Odczytujemy z niej, że bardzo dobrze rozwiązało wtedy to zadanie 9 zawodników, dobrze 2, dostatecznie 27, niedostatecznie 31, 2 zawodników nie rozpoczęło zadania. Być może Komitet Główny — uwzględniając swoje przeoczenie — stosował łagodniejszą skalę ocen dla tego zadania geometrycznego. W przedziale „bardzo dobrze" zmieściło się jeszcze kilku zawodników poza wspomnianą czwórką. Ciekawe natomiast, czy zawodnicy niezawodni w jednym temacie olimpijskim okazali się równie sprawni podczas całych jubileuszowych, dwudziestych piątych zawodów. Może inny kronikarz amator lub sami zainteresowani umieliby odpowiedzieć na to pytanie.

Cały ten barwny epizod potwierdza prawdę, że w świecie matematyki i jej nieubłaganych wnioskowań wszyscy mogą się czuć i naprawdę są równi. Młodzi olimpijczycy dyskutujący jak równy z równym ze znanymi matematykami z Komitetu Głównego Olimpiady — to obraz, który na trwałe pozostanie w pamięci piszącego te słowa.