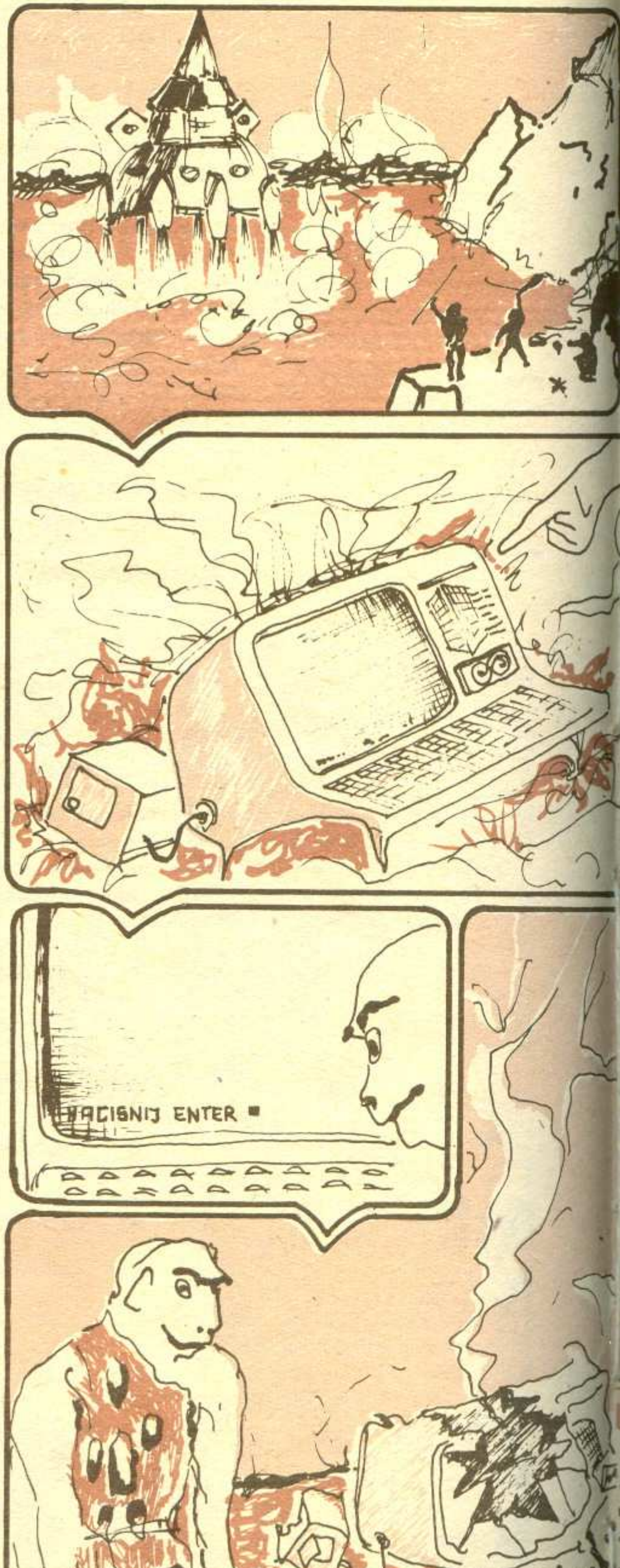
δ mała delta

Czy dodawanie jest przemienne?



W szkole uczy się różnych własności dodawania. Jest ono przemienne, łączne, itd. Warto wiedzieć, na ile te szkolne wiadomości dotyczą tegoż dodawania, ale wykonywanego na kalkulatorach czy też komputerach. Okazuje się, że jedyną własnością dodawania, która pozostaje prawdziwa dla dodawania „maszynowego", jest przemienność.

W komputerach i nieco lepszych typach kalkulatorów liczba przedstawiana jest w postaci zapisu zmiennopozycyjnego. Przypuśćmy, że do zapisu liczby możemy użyć tylko sześciu cyfr. Dobrym sposobem jest wykorzystanie czterech miejsc do zapisu czterech cyfr znaczących liczby, a pozostałych dwóch miejsc do zapisu miejsca położenia przecinka.

Tak więc

$$\begin{aligned} 5765000 &= 0{,}5765 \cdot 10^{7} \\ -28{,}83 &= -0{,}2883 \cdot 10^{2} \\ 0{,}00732 &= 0{,}7320 \cdot 10^{-2} \text{ itd.} \end{aligned}$$

Zamiast podstawy 10 można stosować inne (w komputerach — podstawa 2); liczba cyfr znaczących może być inna (na ogół większa), ale zasada zapisu jest taka sama.

Jak dodawać takie liczby używając sumatora, w którym można zapisywać np. sześć cyfr znaczących? Najlepiej popatrzeć na przykłady.

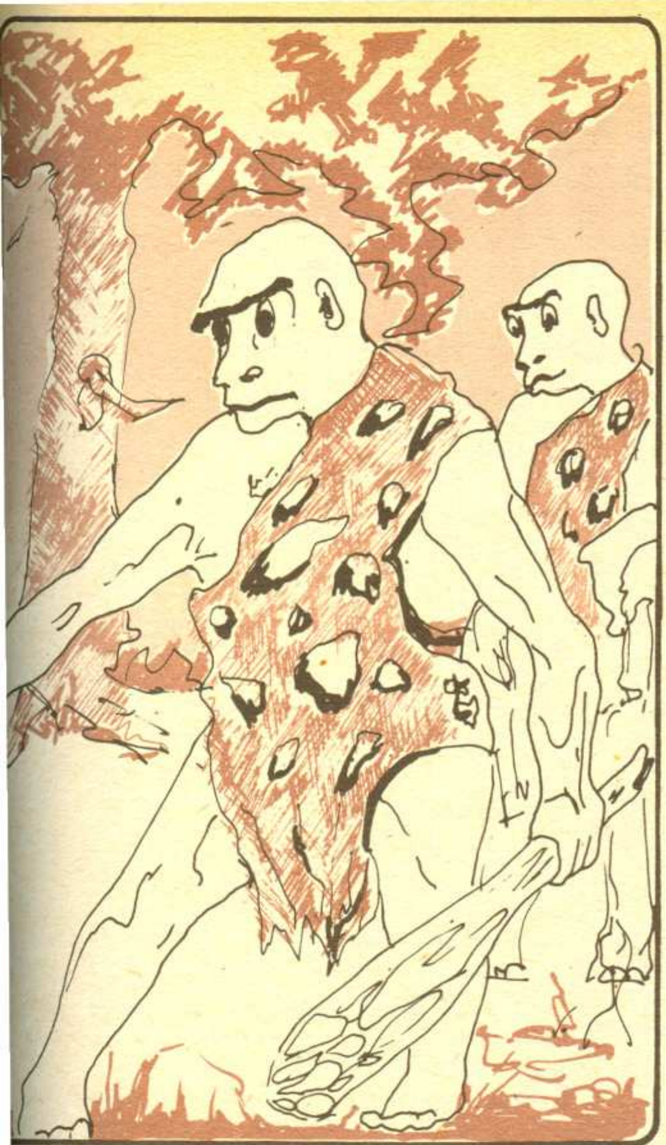
Niech $a = 0{,}5768 \cdot 10^{3}$, $b = 0{,}2315 \cdot 10^{5}$,
$c = 0{,}9785 \cdot 10^{-3}$.

$$\begin{aligned} 0{,}5768 \cdot 10^{3} = {} & 0{,}005768 \cdot 10^{5} \\ & \underline{+0{,}231500 \cdot 10^{5}} \\ & 0{,}237268 \cdot 10^{5}. \end{aligned}$$

Po zaokrągleniu $b+a = 0{,}2373 \cdot 10^{5}$.

$$\begin{aligned} 0{,}9785 \cdot 10^{-3} = {} & 0{,}000000\,9785 \cdot 10^{5} \\ & \underline{+0{,}231500 \qquad\quad \cdot 10^{5}} \\ & 0{,}231500 \qquad\quad \cdot 10^{5}. \end{aligned}$$

Po zaokrągleniu $c+a = 0{,}2315 \cdot 10^{5}$.



Taka jest zasada dodawania liczb w kalkulatorach i komputerach. Oczywiście, takie dodawanie jest przemienne. A jak z innymi własnościami?

Drugi przykład pokazuje, że z równości $x+y = x$ nie musi wynikać, iż $y = 0$.

Łączności też nie ma. Jeśli $a = 0{,}5571 \cdot 10^{-5}$, $b = 0{,}1523 \cdot 10^{-5}$, $c = 0{,}2313 \cdot 10^{-2}$, to $(a+b)+c = 0{,}2320 \cdot 10^{-2}$, ale $a+(b+c) = 0{,}2321 \cdot 10^{-2}$

Może się też zdarzyć, że $a+b = 0$, ale $a \neq -b$. Gdy $a = 0{,}2517 \cdot 10^{-98}$ i $b = -0{,}2516 \cdot 10^{-98}$, to $a+b = 0{,}0001 \cdot 10^{-98} = 0{,}1 \cdot 10^{-101}$. Taki wynik zwykle jest uznawany przez maszynę za równy 0.

Sprawdzenie, co się dzieje z innymi własnościami dodawania, pozostawiamy Czytelnikowi.

O specyfice dodawania przybliżonego warto też pamiętać, gdy mamy dodawać dużo liczb różniących się o kilka rzędów wielkości. Sumowanie od najmniejszej do największej z reguły daje dokładniejszy wynik niż sumowanie od największej do najmniejszej. Na przykład chcemy dodać naszym sumatorem dziesięć tysięcy liczb: jedna jest równa $0{,}1 \cdot 10^5$, a pozostałe równe $0{,}1 \cdot 10^1$.

Dodawanie $0{,}1 \cdot 10^5$ i $0{,}1 \cdot 10^1$ daje $0{,}1 \cdot 10^5$, a więc rozpoczynając sumowanie od największej otrzymujemy wynik równy $0{,}1 \cdot 10^5$. Tymczasem sumując od najmniejszej dostajemy po 9998 dodawaniach liczbę $0{,}9999 \cdot 10^4$ i po dodaniu $0{,}1 \cdot 10^5$ ostatecznym wynikiem jest $0{,}2 \cdot 10^5$.

W tabelce przedstawione są wyniki sumowania liczb

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3},\ \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4},\ \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5},\ \ldots,\ \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

obydwoma sposobami dla różnych wartości n.

(Mówiąc dokładniej: sumujemy — zamiast powyższych liczb — ich przybliżenia z dokładnością do czterech cyfr znaczących; po każdym dodawaniu wynik zaokrąglamy do czterech cyfr znaczących.) W ostatniej rubryce podany jest wynik prawidłowy $\left(\text{tzn. } \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right)$ z dokładnością do sześciu cyfr znaczących.

n	$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$	$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$	$\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$
3	0,2382	0,2381	0,238095
10	0,2464	0,2462	0,246212
20	0,2491	0,2489	0,248918
25	0,2495	0,2493	0,249288
30	0,2497	0,2495	0,249496
40	0,2497	0,2497	0,249710
60	0,2497	0,2499	0,249868
80	0,2497	0,2499	0,249925
100	0,2497	0,2500	0,249951
300	0,2497	0,2500	0,249994
1000	0,2497	0,2500	0,250000

Małą Deltę przygotował Jerzy RYLL