



całkowanie we wzorze (1) rozciągać się będzie na obszar, w którym istnieją jednocześnie pola E i B . Wykorzystując symetrię kołową opisanego układu możemy napisać

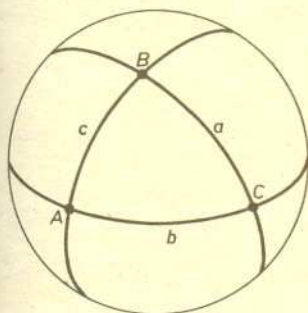
$$(6) \quad L_{EM} = \hat{z} \varepsilon_0 \int_a^R \frac{rQB(2\pi r l)}{2\pi \varepsilon_0 r l} dr = \frac{QB(R^2 - a^2)}{2} \hat{z}.$$

Wykazaliśmy, iż istotnie moment pędu pola równy jest mechanicznemu momentowi pędu rur, który pojawia się po wyłączeniu prądu w solenoidzie. Zasada zachowania momentu pędu nie została naruszona.

Istnieją inne, bardziej dostępne obserwacji zjawiska, w których ujawnia się moment pędu pola elektromagnetycznego. Rozważmy na przykład elektron w modelu atomu Bohra. Ma on określony, w zależności od stanu, w którym się znajduje, moment pędu L_R . Jeśli za pomocą elektromagnesu wytworzymy jednorodne pole magnetyczne B prostopadłe do płaszczyzny orbity, to pole elektryczne elektronu i pole magnetyczne zgodnie z relacją (1) dadzą moment pędu równy $L_{EM} = -er^2B/2$, gdzie r jest promieniem orbity elektronu w modelu Bohra. Zatem zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu dla zrównoważenia powstałego L_{EM} elektron zyska w polu dodatkowy mechaniczny moment pędu $\Delta L_m = -L_{EM}$. Moment magnetyczny stowarzyszony z tym momentem pędu jest równy $m = -e\Delta L_m/(2m_e) = -e^2r^2B/(4m_e)$, a więc ma kierunek przeciwny do kierunku pola B . Jest to tzw. indukowany moment diamagnetyczny. Pojawienie się w obecności pola B dodatkowego momentu pędu ΔL_m oznacza, że elektron obraca się z dodatkową częstością $\omega_p = |\Delta L_m|/(mr^2) = e|B|/(2m)$ zwaną częstością Larmora. Tak więc diamagnetyzm można uważać za konsekwencję zasady zachowania momentu pędu.

Na zakończenie zauważmy, że skoro pole elektromagnetyczne niesie pewien moment pędu, nie powinien nikogo dziwić fakt, iż foton, który jest kwantem tego pola, ma własny moment pędu (spin). Poza tym warto pamiętać, że obiekt fizyczny nie będący w ruchu może mieć pewien moment pędu. „Dysk Feynmana” jest tego przykładem.

Kącik olimpijski



Weźmy trzy punkty A, B, C na sferze nie leżące na jednym kole wielkim. Przez każde dwa z nich poprowadźmy koło wielkie sfery. Te trzy koła wielkie dzielą sferę na 8 części zwanych trójkątami sferycznymi. Kąty $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$ między stycznymi do łuków kół wielkich nazywamy kątami trójkąta sferycznego, a łuki $c = \overset{\frown}{AB}, a = \overset{\frown}{BC}, b = \overset{\frown}{CA}$ kół wielkich — jego bokami (mierzymy je w radianach).

Przy takim podziale sfery jeden z trójkątów ma wszystkie boki i kąty mniejsze od π . Taki trójkąt nazywamy eulerowski. Między jego bokami i kątami zachodzą związki:

- (1) $b - c < a < b + c, a + b + c < 2\pi,$
- (2) $\pi < A + B + C < 3\pi.$

Wzór sinusów

$$(3) \quad \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

Wzory cosinusów

$$(4) \quad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

Wzory cotangensów

$$(5) \quad \sin c \operatorname{ctg} a - \sin b \operatorname{ctg} A = \cos c \cos B, \\ \sin c \operatorname{ctg} b - \sin a \operatorname{ctg} B = \cos c \cos A.$$

Analogiczne wzory otrzymujemy dla pozostałych boków i kątów.

Rozwiążemy teraz zadanie 6 z trzeciego etapu XXXIII OM — używając jednego z powyższych wzorów.

Udowodnić, że w dowolnym czworoboczianie suma wszystkich kątów dwuściennych jest większa od 2π .

Opiszemy najpierw pewną ogólną konstrukcję.

Rozpatrzmy niewielką — tzn. przecinającą tylko trzy ściany — sferę o środku w wierzchołku czworoboczianu. Te trzy ściany (i trzy krawędzie) wyznaczają na sferze boki (i wierzchołki) trójkąta sferycznego eulerowskiego. Miary jego boków to miary kątów płaskich przy wierzchołku, a miary jego kątów to miary kątów dwuściennych. Stosujemy lewą część nierówności (2) do wszystkich wierzchołków czworoboczianu i sumujemy stronami. Po lewej stronie nierówności będzie 4π , po prawej — podwojona suma wszystkich kątów dwuściennych.

Można zauważyć, że stosując konstrukcję opisaną w rozwiązaniu i wzory (3) — (5) dostajemy przepis na rozwiązanie dowolnego naroża (tzn. okolic wierzchołka czworoboczianu), o ile tylko mamy wystarczająco dużo danych początkowych.

Zadania

1. Wykazać, że jeśli wszystkie kąty dwuścienne czworoboczianu są ostre, to wszystkie jego ściany są trójkątami ostrokątnymi.

(zadanie 6 z zawodów III stopnia XXXIV Olimpiady)

2. Udowodnić, że w każdym czworoboczianie istnieje wierzchołek, przy którym trzy kąty płaskie są ostre.

(10-I-XXVIII)

3. Udowodnić, że suma sześciu kątów, pod którymi widać krawędzie dowolnego czworoboczianu z dowolnego jego punktu wewnętrznego, jest większa od 540° .

(zadanie 3 z III Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych)

4. Udowodnić, że jeżeli wszystkie ściany czworoboczianu są trójkątami przystającymi, to te trójkąty są ostrokątne.

(12-I-XII)

Marek GAŁECKI