

Rys. 2

b. Opis heliocentryczny (rys. 2).

$$a_p = a_{kz} - a_{sz} = \left[\frac{Gm}{r^2} \cos\varphi - \frac{Gm}{R^2}, \frac{Gm}{r^2} \sin\varphi \right] \cong \frac{Gm}{r^2} [\cos\varphi, \sin\varphi]$$

$$a_p = \frac{Gm}{r^2},$$

$$\gamma_{\text{helloc}} = a_p \frac{GM}{R^2} = \frac{m}{M} \frac{R^2}{r^2}.$$

Przyrównując oba wyrażenia na γ dostajemy ostatecznie wzór na rozmiar strefy oddziaływania planety

$$r = R \sqrt[5]{\frac{m^2/M^2}{\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}}.$$

Podstawiając dane liczbowe stwierdzamy, że strefa oddziaływania Ziemi rozciąga się do odległości co najmniej 800 tys. km, a więc Księżyc jest stale wewnątrz niej. Oddychamy z ulgą — Księżyc rzeczywiście jest satelitą Ziemi. To samo zresztą dotyczy satelitów innych planet. Pojęcie strefy oddziaływania miało dawniej duże znaczenie praktyczne, np. przy numerycznym śledzeniu ruchu komet zbliżających się do Jowisza. Przy obliczeniach ręcznych cenne były wszelkie chwytysprawniające rachunki. Określenie strefy oddziaływania dawało obiektywną wskazówkę, w którym momencie formalnie heliocentryczny ruch komety staje się jowicentrycznym i odwrotnie, czyli kiedy należy zmienić procedurę rachunkową. Obecnie, kiedy z zastosowaniem komputera można śledzić ruch komety ściśle w każdej chwili, nie ma to praktycznego znaczenia — pozostało nadal znaczenie poznawcze.



Moment bezwładności w geometrii

Radosław SZMYTKOWSKI

Pojęcie momentu bezwładności zostało wprowadzone do fizyki przez Eulera, gdy ten podawał równania ruchu bryły sztywnej. Od tej pory udowodniono wiele własności momentu, np. twierdzenie Steinera, twierdzenie o osiach prostopadłych, własność nierówności trójkąta i inne. Okazało się również, że pojęcie momentu bezwładności może być przydatne przy rozwiązywaniu problemów geometrycznych. Przedstawimy tu kilka zastosowań do figur płaskich. Pierwsze z nich dotyczy

Twierdzenia o siecznych przechodzących przez środek ciężkości trójkąta:

Jeżeli przez środek ciężkości trójkąta przeprowadzona jest prosta, to suma odległości od tej prostej dwóch wierzchołków trójkąta, znajdujących się po jednej stronie, równa jest odległości trzeciego wierzchołka od tej prostej.

Dowód. Zarówno w tym dowodzie, jak i w następnych będziemy korzystali z następującego faktu, który łatwo udowodnić: środek ciężkości trójkąta pokrywa się ze środkiem ciężkości figury złożonej z trzech punktów materialnych o równych masach umieszczonych w wierzchołkach tego trójkąta.

Moment bezwładności wyżej opisanego układu punktów materialnych względem osi K przechodzącej przez środek ciężkości tego układu i leżącej w płaszczyźnie trójkąta jest dany wzorem

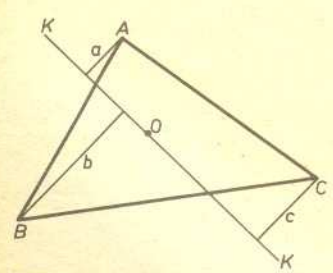
$$(1) \quad J_O = \frac{m}{3} (a^2 + b^2 + c^2),$$

gdzie a, b, c są odległościami odpowiednich wierzchołków od osi K , a m — suma mas (rys. 1). Moment bezwładności względem osi równoległej do K i przechodzącej przez punkt A jest dany wzorem $J_A = J_O + ma^2$. Z drugiej strony

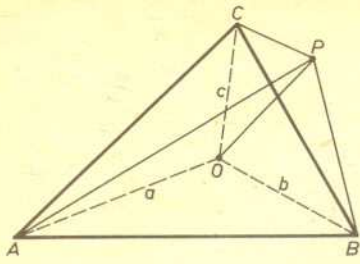
$$(2) \quad J_A = \frac{m}{3} (c-a)^2 + \frac{m}{3} (a+b)^2,$$

czyli

$$J_O = \frac{1}{3} m(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{2}{3} ma^2 + \frac{2}{3} ma(b-c),$$



Rys. 1



Rys. 2

skąd
$$\frac{2}{3}ma^2 - \frac{2}{3}ma(b-c) = 0,$$

oraz
$$a+c = b$$
 c.b.d.o.

Podobnie, wykorzystując własności momentu bezwładności można udowodnić następujące

Twierdzenie Leibniza:

Suma kwadratów odległości dowolnego punktu P od wierzchołków trójkąta równa jest sumie kwadratów odległości wierzchołków od środka ciężkości trójkąta i potrojonego kwadratu odległości punktu P od środka ciężkości (rys. 2).

Dowód. Ponownie zastępujemy trójkąt trzema masami, $m/3$ każda, umieszczonymi w jego wierzchołkach. Moment bezwładności względem osi przechodzącej przez punkt P i prostopadłej do płaszczyzny trójkąta jest równy

$$J_P = \frac{m}{3}(PA^2 + PB^2 + PC^2),$$

gdzie PA, PB, PC są odpowiednio odległościami punktu P od wierzchołków A, B, C trójkąta. Z drugiej strony, na mocy twierdzenia Steinera, moment ten jest równy

$$J_P = J_O + m \cdot PO^2,$$

gdzie J_O — moment bezwładności względem osi równoległej do poprzednio rozważanej i przechodzącej przez środek ciężkości O trójkąta, a PO — odległość od punktu P do punktu O . Przyrównując oba wyrażenia na J_P i uwzględniając, że

$$J_O = \frac{m}{3}(a^2 + b^2 + c^2),$$

gdzie a, b, c są odpowiednio odległościami wierzchołków A, B, C od punktu O , otrzymamy

$$\frac{m}{3}(PA^2 + PB^2 + PC^2) = \frac{m}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + m \cdot PO^2,$$

skąd natychmiast wynika teza twierdzenia.

Czytelnikowi proponujemy, aby korzystając z własności momentu bezwładności rozwiązał następujące

Problemy:

- 1) udowodnić, że suma kwadratów środkowych trójkąta jest równa $3/4$ sumy kwadratów boków,
- 2) znaleźć długości środkowych trójkąta mając dane długości jego boków,
- 3) znaleźć odległość środka okręgu opisanego na trójkącie od środka ciężkości tego trójkąta.

Oczywiście, moment bezwładności można wykorzystać nie tylko do dowodzenia własności trójkąta. Ilustruje to następujący przykład.

Problem.

Pokazać, że dla cienkiego pierścienia w kształcie elipsy o masie m i dużej półosi a zachodzi

$$\sum_i \Delta m_i \cdot l_i = m \cdot a,$$

gdzie Δm_i — masa nieskończenie małego elementu pierścienia odległego o l_i od jednego z ognisk elipsy.

Rozwiązanie. Momenty bezwładności względem osi przechodzących przez ogniska F_1 i F_2 (rys. 3), prostopadłych do płaszczyzny rysunku, są oczywiście równe:

$$(3) \quad \sum_i \Delta m_i \cdot l_i^2 = \sum_i \Delta m_i \cdot k_i^2,$$

gdzie Δm_i — jak wyżej, l_i, k_i — odpowiednio odległości tego elementu od ognisk F_1 i F_2 . Korzystając z następującej własności elipsy $k_i + l_i = 2a$ i podstawiając to do (3) mamy

$$\sum_i \Delta m_i \cdot l_i^2 = \sum_i \Delta m_i (2a - l_i)^2,$$

co po przekształceniu daje

$$4m \cdot a^2 = 4a \cdot \sum_i \Delta m_i \cdot l_i \quad \left(\sum_i \Delta m_i = m \right)$$

i ostatecznie

$$(4) \quad \sum_i \Delta m_i \cdot l_i = m \cdot a.$$

Uwaga. Własność powyższą można też udowodnić nie korzystając wcale z pojęcia momentu bezwładności. Jak?

Czytelnikowi zainteresowanemu opisywanym tutaj zagadnieniem polecamy artykuł w radzieckim czasopiśmie *Kwant* 7/1984 pod tym samym tytułem co ten. Można tam znaleźć wiele innych geometrycznych twierdzeń uzyskanych użytą tu metodą.



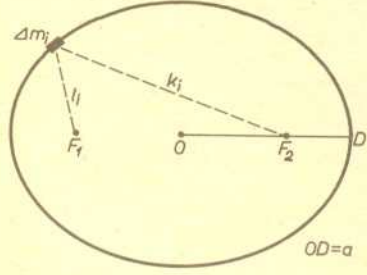
Rozwiązanie zadania F 212. Aby obliczyć, ile energii zaabsorbują powierzchnia rakiety, musimy obliczyć zdolność absorpcyjną zewnętrznej powierzchni. Zdolność absorpcyjna A jest stosunkiem energii absorbowanej z padającego promieniowania do energii całkowitej tego promieniowania. Na podstawie wzoru Stefana-Boltzmana całkowita zdolność emisyjna E_{em} , tzn. ilość energii wypromieniowanej przez jednostkę powierzchni w ciągu 1 s dla danej temperatury jest równa:

$$E_{em} = A\sigma T^4, \text{ stąd } A = E_{em}/(\sigma \cdot T^4),$$

gdzie σ jest stałą Stefana-Boltzmana równa $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^{-4}$. Na podstawie danych otrzymujemy $A = 0,88$. Energia absorbowana $E_{abs} = AE$, która oświetla powierzchnię $P = vts$, musi być co najmniej równa ilości ciepła potrzebnej na stopienie masy $m = \rho Ph$ metalu o gęstości ρ . Otrzymujemy stąd energię wypromieniowaną przez laser

$$E = \frac{\rho v t s h}{A} c_w (T_k - T),$$

gdzie efekty przewodnictwa ciepła zostały pominięte. Przyjmując dane dla stali $\rho = 7700 \text{ kg/m}^3$, $c_w = 460 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$, $T_k = 1800^\circ\text{C}$ otrzymujemy $E \approx 512000 \text{ J}$.



Rys. 3