



A jednak się kręci (w jedną stronę!)

Rozwiązanie zadania M 487. Zbudujmy trzy sfery, których średnicami będą boki danego trójkąta ABC . Rozważmy dwie z tych sfer zawierające dowolny wierzchołek, np. A . Przecinają się one wzdłuż okręgu leżącego w płaszczyźnie prostopadłej do boku BC , którego średnicą jest wysokość opuszczona z A . Kula ograniczona trzecią sferą nie zawiera punktu A (bo kąt A jest ostry) i zawiera spodek wysokości opuszczonej z A (bo z ostrokatności trójkąta wynika, że leży on na BC). Zatem wszystkie trzy sfery mają dwa punkty wspólne (przecięcia okręgu z trzecią sferą). Półproste łączące dowolny z nich z wierzchołkiem trójkąta są parami prostopadłe. Wystarczy teraz zauważyć, że trójki wzajemnie prostopadłych półprostych wychodzących z jednego punktu są przystające w przestrzeni.

Dr Jakub TATARKIEWICZ

Gdy Redakcja *Delty* ogłosiła konkurs na zrobienie zabawki, która kręci się tylko w jedną stronę lub sama zmienia kierunek obrotów, nikt nie przypuszczał, że niemalże w tym samym czasie zostanie opublikowana pełna teoria obrotów takich brył. Wszyscy żyjemy w przekonaniu, że mechanika klasyczna jest dziedziną zamkniętą — co było do obliczenia, to dawno obliczono, co trzeba było udowodnić, dawno już udowodniono. A jednak nie! Przez 90 lat konkursowy problem *Delty* pozostawał nie rozwiązany. Po raz pierwszy pojawił się on bowiem w pracy G. T. Walkera, opublikowanej w tomie 28 *Journal of Pure and Applied Mathematics* z roku 1896. Precyzyjne rozwiązanie, jak powiedzieliśmy, zostało podane dopiero w 1986 roku przez Sir Hermana Bondi, FRS (członek Royal Society) z Churchill College w Cambridge i opisane w tomie A405 *Proceedings of the Royal Society of London*. Wprawdzie matematyka w artykule Bondiego jest prosta, niemniej liczba przekształceń potrzebnych do osiągnięcia końcowych wniosków jest znaczna. Dlatego też w tym krótkim artykule przedstawimy tylko zarys metody mając nadzieję, iż pracownicy Czytelnicy sami wykonają właściwe rachunki.



Rozwiązanie zadania M 488. Ustalmy $x \neq 0$ i niech $z = \cos t + i \sin t$. Wtedy na mocy wzoru de Moivre'a

$$S_n(t) = \operatorname{Im}(z + z^2 + \dots + z^n) = \operatorname{Im}\left(z \frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right),$$

zatem

$$|S_n(t)| \leq \frac{|z|(1+|z|^n)}{|1-z|} \leq \frac{2}{|1-z|}.$$

Jeśli zaś $t = 0$, to $S_n(t) = 0$.

Najprzód napiszemy układ równań, opisujących ruch obrotowy dowolnej bryły na gładkiej płaszczyźnie. Użyjemy następującej notacji:

- s — położenie środka masy, $ds/dt = v$,
- r — wektor łączący środek masy z punktem styku bryły i płaszczyzny,
- F — siła oddziaływania płaszczyzny na bryłę,
- ω — prędkość kątowna bryły,
- h — moment pędu bryły,
- M — masa bryły,
- u — pionowy wersor (wektor jednostkowy), skierowany do góry.

Układ równań ruchu wygląda wtedy tak

$$\begin{aligned} M dv/dt &= F - Mgu, \\ v + \omega \times r &= 0, \\ dh/dt &= r \times F. \end{aligned}$$

Przez „ \times ” oznaczyliśmy mnożenie wektorowe. Przypomnijmy, że pierwsza równość to znane równanie Newtona, gdzie uwzględniono opór ruchu. Druga równość oznacza, że punkt kontaktu z płaszczyzną ma prędkość zerową. Trzecia zaś to konsekwencja zasady zachowania momentu pędu — przekształcając ją z użyciem pierwszego równania otrzymujemy

$$dh/dt = Mr \times [dv/dt + gu].$$

Tak więc składowa pionowa momentu pędu ma postać

$$d(u \cdot h)/dt = M(u \times r) \cdot dv/dt,$$

gdzie przez „ \cdot ” oznaczyliśmy mnożenie skalarne wektorów.

Jeżeli bryła toczy się i wiruje (ruch uogólniony), to mamy parę możliwości. Po pierwsze wektor r może być zawsze pionowy (środek ciężkości jest zawsze nad punktem styczności bryły z płaszczyzną) — wtedy $u \times r$ znika i pionowa składowa momentu pędu jest stała w czasie. Jest to typowy ruch, z jakim spotykamy się codziennie, więc intuicyjnie dobrze wyczuwamy jego charakter. Oczywiście wektor $u \times r$ może być w ruchu uogólnionym niezerowy. Jeżeli jednak nie jest on w sposób systematyczny związany ze zmianami prędkości ruchu bryły (tzn. ze zmianami dv/dt), to wtedy moment pędu zmienia się w sposób chaotyczny. Ten przypadek też znamy z dzieciństwa: bąk puszczonej na krzywej podłodze skacze, kiwa się i drga. Natomiast jeżeli wektor $u \times r$ jest związany z dv/dt , to łatwo można otrzymać olbrzymie wahania pionowej składowej momentu pędu. W ten sposób może nawet dojść do zmiany kierunku obrotów.

Dużo trudniejszym problemem jest pokazanie, że układ może mieć krętność, czyli preferować jeden kierunek obrotów. Ale przecież mamy już dwa układy odniesienia. Jeden jest związany z układem współrzędnych, zaczepionym w punkcie styczności bryły z płaszczyzną. Drugi zaś powiązemy z lokalnymi osiami symetrii bryły w miejscu styku z podłożem. W pierwszym przybliżeniu powierzchnia bryły może być opisana równaniem kwadratowym (elipsoida). Bondi, podobnie jak i Walker, zauważa, że w ogólności wektor r w stanie spoczynku nie musi być



Rozwiązanie zadania M 489. Okrąg o długości $n+1$ dzielimy na k kątów o długościach 1.

Spśród punktów podziału licowo wybieramy $k+1$ punktów — w szczególności na symetrię średnia długości powstałych łuków wynosi

$$\frac{n+1}{k+1}. \text{ Jeżeli konstruujemy okrąg w } (k+1)\text{-szym}$$

z wybranych punktów, a następnie rozwinieśmy go na osi liczbowej w kierunku dodatnim tak, aby punkt rozcięcia znajdował się w zerze, to wybrane licowo k punktów okręgu należy się na liczby naturalne k przedziału $(0, n)$.

Średnia wartość najmniejszej z nich będzie równa średniej długości łuku między punktami

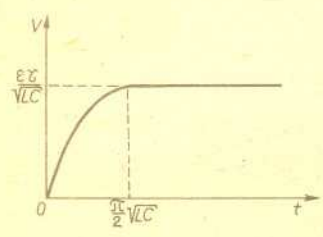
$$k \pm (1/k) \text{ wyl. } \frac{n+1}{k+1}.$$



Rozwiązanie zadania P 232. W momencie zamykania wyłącznika K prąd elektryczny nie płynie przez diodę i kondensator pozostaje nie naładowany. W tym samym czasie SEM indukcji jest równa SEM baterii i prąd przez cewkę rośnie proporcjonalnie z czasem do momentu wyłączenia klucza. Kiedy osiąga wartość $I = \mathcal{E}/R$. Po otwarciu wyłącznika K w obwodzie powstają drgania o okresie $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Ale kiedy napięcie na kondensatorze osiąga maksymalną wartość $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ (co można otrzymać z zasady zachowania energii), dioda przestaje przewodzić i dalej napięcie pozostaje stałe. A więc zależność napięcia od czasu jest następująca (patrz rysunek)

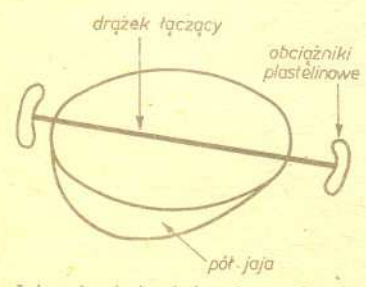
$$U = \frac{\mathcal{E}t}{\sqrt{LC}} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}} \quad \text{dla } t \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{LC}$$

$$U = \frac{\mathcal{E}t}{\sqrt{LC}} \quad \text{dla } t \geq \frac{\pi}{2} \sqrt{LC}$$



Od redakcji

Rewelacyjne „kamienie” nadesłał na nasz konkurs (Delta 12/1986) Janusz Sokół z Przeworska. Są znacznie lepsze nie tylko od tych, które wykonaliśmy w redakcji, ale także od opisanych w literaturze (Scientific American, październik 1979). Według relacji konstruktora jeden z kamieni obrócił się w kierunku przeciwnym do pierwotnego aż 29 razy. Nam nie udało się powtórzyć tego wyniku, ponieważ, wykonane ze skorupki jajka i patyczka z plastelinowymi ciężarkami, kamienie dotarły do redakcji w stanie uszkodzonym. Uzyskaliśmy „tylko” 19 pełnych obrotów. Zwycięzcy gratulujemy i przyznajemy nagrodę — miernik uniwersalny.



Jeden z kamieni nadesłanych przez Janusza Sokola.

związany z głównymi osiami momentu bezwładności bryły. Jednakże trudno jest wyobrazić sobie płynny ruch obrotowy bez ich zgodności, co założono w dalszych rachunkach. Wybiera się układ współrzędnych w bryle związany z jej środkiem ciężkości i równoległy do głównych osi bezwładności powierzchni przybliżającej okolice punktu styku bryły z podłożem. Osie momentu bezwładności wybieramy tak, że składowe tego momentu spełniają warunek $A > B$, a oś odpowiadająca składowej C jest skierowana pionowo w dół (przez A , B oraz C oznaczono długość głównych osi elipsoidy momentu bezwładności). W takim układzie współrzędnych powierzchnia okolic styku bryły z podłożem może być opisana w przybliżeniu kwadratowym jako

$$z = a[1 - (p/2)(x/a)^2 - qxy/a^2 - (s/2)(y/a)^2],$$

gdzie a jest spoczynkową odległością środka ciężkości od punktu styczności; p , q oraz s to pewne parametry. Człon liniowy w rozwinięciu równania powierzchni znika, gdyż w miejscu styku $x = y = 0$. Powierzchnia jest wypukła, gdy $p > 0$, $s > 0$ oraz $ps > q^2$ (sprawdzenie tych warunków pozostawiamy Czytelnikom). Ponadto położenie spoczynkowe jest stabilne, gdy promień krzywizny jest nie mniejszy niż a , mamy więc dodatkowe warunki: $1 > p$, $1 > s$, $(1-p)(1-s) > q^2$. Stąd od razu widzimy, że układ wykazuje krętość, o ile tylko $q \neq 0$. Wtedy bowiem nie mamy pełnej symetrii układu: intuicja podpowiada, że kształt powierzchni zabawek, przygotowanych przez Czytelników, podobny do kilu jachtowego, wyróżnia pewną linię styku, leżącą w płaszczyźnie symetrii bryły. Jest to zasadnicze odstępstwo od geometrii typowego bąka, który wprawdzie może mieć płaszczyznę symetrii, lecz zwykle ma ostry czubek, na którym się obraca.

Chciałbym w tym miejscu uczynić pewne wyznaczenie. Otóż pamiętam z dzieciństwa, jak dziwiło mnie, gdy mój Ojciec, który zajmuje się mechaniką teoretyczną, siadał na podłodze i puszczał bączki. A miał ich wiele, zrobionych specjalnie z drewna przez stolarza. Dodatkowo jeszcze obciążał je plasteliną. Wydawało mi się wtedy, że takie zabawy to świetne zajęcia, szczególnie gdy za nie płać. Dziś wiem, że nasza intuicja jest niezmierzenie uboga. By ją wzbogacić, należy dokonywać doświadczeń. Jeżeli ktoś akurat opracowuje teorię bąka, to nie ma lepszego doświadczenia niż opisana powyżej zabawa. Mam nadzieję, że i Czytelnicy *Delty* będą mogli podobne zabawy przenieść w świat swych zajęć zawodowych!

Dalej w teorii mamy już tylko proste rachunki (hm, trzeba być Fellow of the Royal Society, by tak twierdzić...). Bondi rozwija równania ruchu w szeregi Taylora i opuszcza wszystkie człony rzędu trzeciego i wyższych w rozwinięciach pochodnych czasowych x , y oraz z . Na pięciu stronach przechodzi do kolejnych warunków na parametry równania ruchu układu. Wprowadzając liczne parametry pomocnicze uzyskuje podział płaszczyzny parametrów ruchu na kilka odrębnych obszarów (zainteresowanych Czytelników odsyłamy do stron 267—272 tomu A 405 *Proceedings of the Royal Society*). W każdym z nich ruch bryły odbywa się inaczej. Przejście od jednego do drugiego obszaru może m.in. prowadzić do zmiany kierunku obrotów. Dla tych Czytelników, którym nie chciało się zrobić własnych modeli zabawki, podajemy przybliżony opis tego ruchu: w zależności od prędkości zakręcenia zabawka może obracać się, jednocześnie wykonując ruchy kolebiące, by w końcu zmienić kierunek obrotu. Może też, przy zbyt wolnym zakręceniu, stosunkowo szybko zatrzymać się — istotne jest kolebanie się zabawki, gdyż to ono właśnie powoduje zmianę kierunku obrotu!

Z teorii wynika więc, że obserwowane zjawisko jest skutkiem ruchu obrotowego bryły, połączonego z toczeniem. Warunkiem koniecznym odwracania kierunku wirowania jest brak symetrii momentu bezwładności wokół pionowej osi obrotu (warunek $A > B$) oraz niepokrywanie się elipsoidy, przybliżającej powierzchnię bryły w miejscu styku, z elipsoidą momentu bezwładności (warunek $q \neq 0$). W praktyce nie są ważne wartości asymetrii — dlatego też stosunkowo łatwo jest zrobić odpowiednią zabawkę, o ile wie się, że jest to możliwe. Jak przekonali się Czytelnicy, o wiele ważniejszy jest kształt powierzchni styku niż rozkład momentu bezwładności w bryle. Przy zbyt małej krzywiznie powierzchni zawsze otrzymamy niestabilności kręcenia się bryły w obu kierunkach. Jednocześnie przy właściwej prędkości zakręcenia bryłą jeden kierunek ruchu będzie stabilny, drugi zaś nie, co wynika wprost z teorii. Istotny jest też właściwy współczynnik tarcia między zabawką a podłożem: gdy powierzchnia zabawki jest zbyt chropowata, to zabawka zatrzyma się bez zmiany kierunku obrotu, niezależnie od początkowej prędkości obrotowej. Zbyt mały współczynnik tarcia też nigdy nie pozwoli na zmianę kierunku obrotu — nie sądzę jednak, by zabawki wykonywane w warunkach domowych były tak dobrze wypolerowane.

Na koniec uwaga dla prawdziwie ambitnych: ciągle jeszcze nie opracowano teorii ruchu brył, których główna oś momentu bezwładności w stanie spoczynku nie jest pionowa. Może ktoś z Czytelników ...