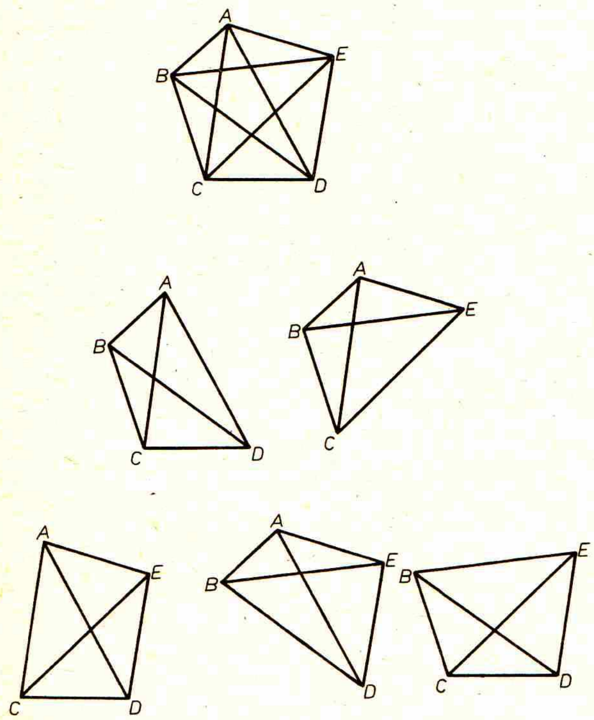
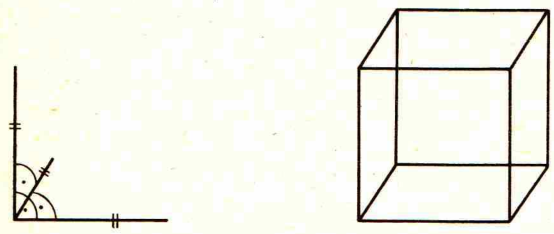
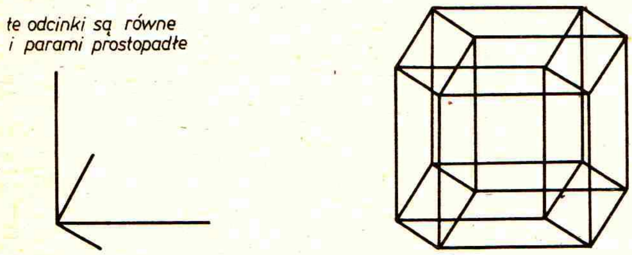
Rysujemy czterowymiarowo

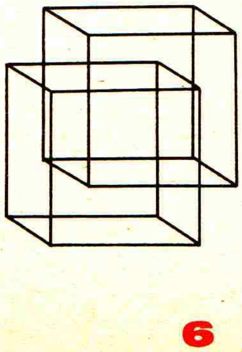


Rys. 1


Rys. 2



Rys. 3


Rys. 4

Co przedstawia rysunek 1? Pierwsza prawdziwa odpowiedź brzmi: pięciokąt wraz z przekątnymi oraz pięć czworokątów (a więc wszystkie), jakie dadzą się z niego uzyskać przez pominięcie jednego wierzchołka i wychodzących z niego odcinków.

Druga prawdziwa odpowiedź brzmi: ostrosłup czworokątny z narysowanymi przekątnymi podstawy oraz cztery ostrosłupy trójkątne i leżący w podstawie czworokąt wraz z przekątnymi. Który z punktów A — E jest wierzchołkiem ostrosłupa — można sobie wybrać. Tak więc można w tym rysunku zobaczyć pięć różnych ostrosłupów.

Zanim rozpatrzymy następną prawdziwą odpowiedź, zastanówmy się, jak to możliwe, by prawdziwych odpowiedzi było więcej niż jedna. Możliwość ta bierze się z powszechnie przyjętej umowy dotyczącej rysowania obiektów trójwymiarowych na (płaskiej) kartce papieru. Umowa ta orzeka, że trzy różne kierunki narysowanych linii mogą być traktowane (odczytywane, rozumiane) jako kierunki nie mieszczące się w jednej płaszczyźnie. Umowa ta jest tak mocno ugruntowana, że przedstawiony na rysunku 2 sześciokąt z pewnymi „dodatkami" każdy będzie interpretował przede wszystkim jako sześcian, nawet jeśli nie będzie obok żadnego objaśnienia.

Skoro można (wbrew geometrii kartki papieru) przyjąć umowę, że trzy narysowane odcinki są parami prostopadłe, to czemu nie można by umówić się podobnie, gdy tych odcinków jest cztery? Oczywiście, sytuacja taka może być wiernie zrealizowana dopiero w przestrzeni czterowymiarowej. Jednak, mimo iż takiej przestrzeni nie mamy pod ręką, wykonywane zgodnie z tą umową rysunki będą sytuacje i figury czterowymiarowe przedstawiały równie wiernie, jak „zwykły" perspektywiczny rysunek przedstawia sytuacje i figury trójwymiarowe. Tak więc rysunek 3 przedstawia czterowymiarową kostkę. Istotnie — z każdego wierzchołka wychodzą (cztery) parami prostopadłe i jednakowej długości odcinki.

Zbadajmy czterowymiarową kostkę bliżej. Jeśli pominiemy jeden z kierunków (np. wycierając na ołówkowym rysunku wszystkie krawędzie mające ten kierunek), to otrzymamy dwa sześciany (rys. 4). Wniosek stąd taki, że czterowymiarowa kostka ma po dwie ściany sześcienne prostopadłe do każdego z kierunków swoich krawędzi (tak jak sześcian ma po dwie ściany kwadratowe, a kwadrat po dwa boki prostopadłe do „opuszczonego" kierunku). Łącznie zatem (bo możemy „opuścić" dowolny kierunek) kostka czterowymiarowa ma osiem jednakowych (bo krawędzie są równe) ścian sześciennych, przy czym w każdym wierzchołku zbiegają się po cztery takie ściany. W podobny sposób można ustalić, że ścian dwuwymiarowych (kwadratów) jest 24. Są one pogrupowane w 6 czwórek równoległych, a w każdym z szesnastu wierzchołków zbiega się ich po 6. Wreszcie krawędzi jest 32. Mamy więc zależność

liczba ścian trójwymiarowych —

— liczba ścian dwuwymiarowych +

+ liczba ścian jednowymiarowych (krawędzi) —

— liczba ścian zerowymiarowych (wierzchołków) = 0.

Można udowodnić, że tak jest dla dowolnego „wielościanu" czterowymiarowego (nie tylko dla kostki), o ile tylko nie ma on „dziur" (mówiąc dokładniej — jest homeomorficzny z kulą).

Ale wróćmy do czterowymiarowych rysunków. Z tego, co powiedzieliśmy wyżej, wynika, że właściwie każdy rysunek można interpretować jako dowolnie wysokowymiarowy. Przecież „nowych" kierunków prostopadłych możemy dorysować, ile tylko mamy ochotę. Istotnie, tylko że na ogół „nowe" kierunki prostopadłe nic nowego nie wnoszą. Spójrzmy na rysunek 2. Choćbyśmy dorysowali dodatkowy kierunek prostopadły, to i tak na rysunku będziemy mieli trójwymiarowy sześcian — po prostu na rysunku są tylko trzy kierunki.

A co zobaczymy traktując górny wielościan z rysunku 1 jako czterowymiarowy? Zobaczymy tzw. sympleks czterowymiarowy, czyli najmniejszy wielościan zawierający pięć punktów, które nie mieszczą się w jednej trójwymiarowej przestrzeni. Niżej narysowane rysunki będą wtedy przedstawiały wszystkie jego czworościenne trójwymiarowe ściany. Ścian dwuwymiarowych (trójkątów) ma on 10 i tyleż krawędzi. Czytelnik zechce samodzielnie uzasadnić, dlaczego rysunek ten, potraktowany jako pięciowymiarowy, też będzie przedstawiał czterowymiarowy sympleks, choć są na nim więcej niż cztery różne kierunki.

Opracował M. K.