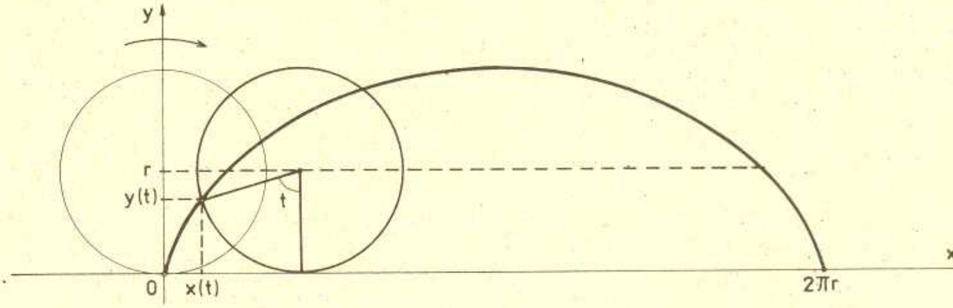
O toczeniu wielokąta

Mgr Jarosław GÓRNICKI

Gdy okrąg o promieniu $r > 0$ toczymy po prostej l, to wybrany punkt tego okręgu zakreśla krzywą – cykloidę (rys.1). W prostokątnym układzie współrzędnych opisują ją równania parametryczne: $x(t) = r(t - \sin t)$, $y(t) = r(1 - \cos t)$, $t \in \mathbf{R}$.



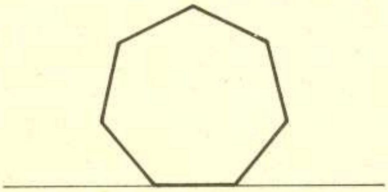
Rys.1. Arkada cykloidy.

Już w XVII wieku wykazano, że:

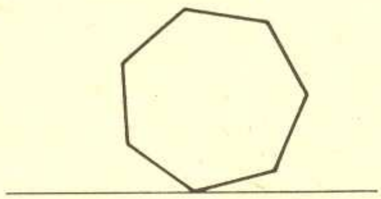
A. Pole figury ograniczonej jedną arkadą cykloidy i osią OX jest równe $3 \cdot \pi r^2$ (Gilles Persone de Roberval, 1634);

B. Długość jednej arkady cykloidy jest równa $4 \cdot 2r$ (Christopher Wren, 1658).

W tym artykule wykażemy analogiczne własności dla krzywej „wyznaczonej" przez toczący się po prostej wielokąt foremny. Dokonamy tego patrząc na płaszczyznę jako na zbiór liczb zespolonych.



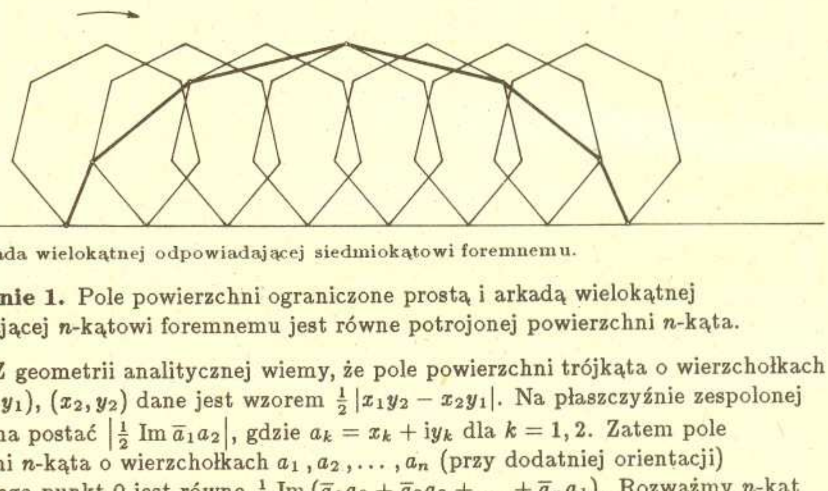
Rys.2. Pozycja „stabilna".



Rys.3. Pozycja „niestabilna".

Pozycję wielokąta z rysunku 2 będziemy nazywać stabilną.

Definicja. Wielokątna odpowiadająca n-kątowi foremnemu to łamana, której wierzchołki wyznacza ustalony wierzchołek n-kąta w kolejnych pozycjach stabilnych podczas toczenia wielokąta po prostej.

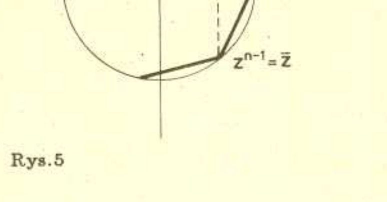


Rys.4. Arkada wielokątnej odpowiadającej siedmiokątowi foremnemu.

Twierdzenie 1. Pole powierzchni ograniczone prostą i arkadą wielokątnej odpowiadającej n-kątowi foremnemu jest równe potrojonej powierzchni n-kąta.

Dowód. Z geometrii analitycznej wiemy, że pole powierzchni trójkąta o wierzchołkach $(0,0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2) dane jest wzorem $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$. Na płaszczyźnie zespolonej wzór ten ma postać $\left|\frac{1}{2}\operatorname{Im}\overline{a}_1a_2\right|$, gdzie $a_k = x_k + \mathrm{i}y_k$ dla $k = 1, 2$. Zatem pole powierzchni n-kąta o wierzchołkach $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (przy dodatniej orientacji) zawierającego punkt 0 jest równe $\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{a}_1a_2 + \overline{a}_2a_3 + \ldots + \overline{a}_na_1)$. Rozważmy n-kąt foremny o wierzchołkach w punktach $1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}$, gdzie $z = \exp(2\pi\mathrm{i}/n)$. Jego pole powierzchni wynosi $\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\overline{z}^kz^{k+1}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Im} nz$. Zauważmy, że tworząc wielokątną (rys.6) odpowiadającą temu n-kątowi, przesuwamy w kolejnej pozycji stabilnej „środek" n-kąta o wektor $\overrightarrow{(\overline{z} - 1)}$ (o długości boku n-kąta). Wtedy wierzchołki tworzące arkadę wielokątnej są postaci:

$$a_{j+1} = j \cdot (\overline{z} - 1) + z^j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$



Rys.5

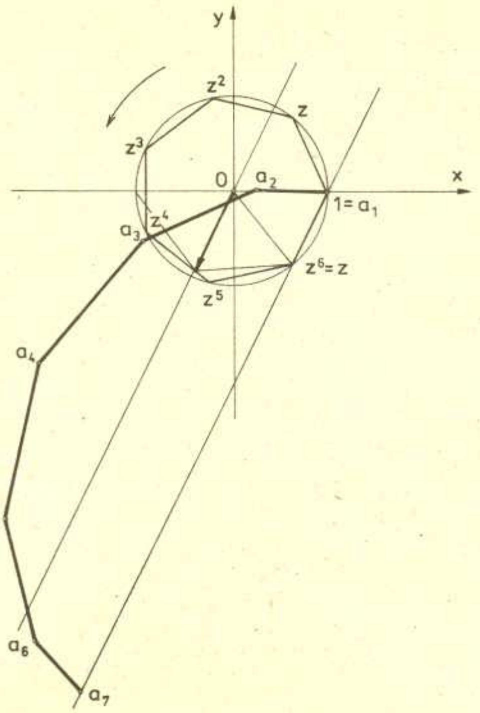
Wówczas pole powierzchni interesującej nas figury W (rys.6) jest równe sumie pól trójkątów $\triangle a_1a_2a_3$, $\triangle a_1a_3a_4$, …, $\triangle a_1a_{n-1}a_n$, z których każde możemy wyrazić wzorem (rys.7)

$$|\triangle a_1a_ka_{k+1}| = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\overline{a}_ka_{k+1} + \frac{1}{2}\left(\operatorname{Im}\overline{a}_{k+1} - \operatorname{Im}\overline{a}_k\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

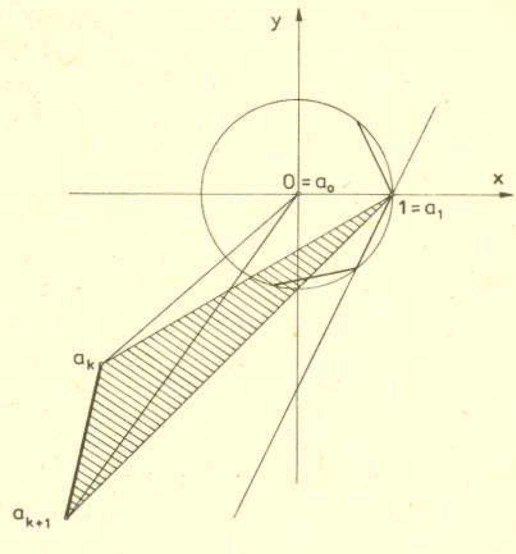
A teraz niezbędne rachunki:

$$|W| = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\overline{a}_ka_{k+1}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n-1}(\overline{a}_{k+1} - \overline{a}_k)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left(j(z-1) + \overline{z}^j\right)\cdot\left((j+1)(\overline{z}-1) + z^{j+1}\right)\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(n(z-1) - 1\right) =$$



Rys.6



Rys.7. $|\Delta a_1 a_k a_{k+1}| = |\Delta a_0 a_k a_{k+1}| + |\Delta a_0 a_{k+1} a_1| - |\Delta a_0 a_k a_1|$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left(j(z-1)z^{j+1} + (j+1)\overline{z}^j(\overline{z}-1) + z\right)\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\, nz =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left((z-1)\sum_{j=0}^{n-1}\left(jz^{j+1} - (j+1)z^j\right)\right) + \mathrm{Im}\, nz =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\, n(z-1) + \mathrm{Im}\, nz = 3\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\, nz$$

i dowód twierdzenia jest zakończony.

Oczywiście, dwa kąty ostre przy podstawie wielokątnej są równe i mają miarę $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\pi$. Można również sprawdzić, że miara każdego z pozostałych $(n-2)$ rozwartych kątów wielokątnej jest równa $\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi$.

Kolej teraz na następną własność.

Twierdzenie 2. Długość L wielokątnej odpowiadającej n-kątowi foremnemu wynosi $4(r+R)$, gdzie r i R oznaczają odpowiednio promień okręgu wpisanego i okręgu opisanego tego wielokąta.

Dowód. Dla n-kąta foremnego o wierzchołkach w punktach $1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}$ (gdzie $z = \exp(2\pi i/n)$) promień okręgu opisanego R jest równy 1, a promień okręgu wpisanego $r = \cos\frac{\pi}{n}$ (rys.5), k-ty bok wielokątnej ma długość $|b_k| = |a_{k+1} - a_k|$, dla $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Krótkie rachunki pokazują, że $b_k = (1-\overline{z})(z^k - 1)$. W szczególności $|b_1| = |1-\overline{z}|\cdot|z-1| = 4\sin^2\frac{\pi}{n}$. Niech $s = \exp(\pi i/n)$, czyli $s^2 = z$.

Wówczas $\dfrac{b_{k+1}}{b_k} = \dfrac{s^{2k+2}-1}{s^{2k}-1} = \dfrac{s^{2(k+1)} - \overline{s}^{k+1}s^{k+1}}{s^{2k} - \overline{s}^k s^k} = s\cdot\dfrac{\sin\frac{(k+1)\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}}$,

skąd $b_k = s^{k-1}\cdot b_1\cdot\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$. Wobec tego $L = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}|b_k| = 4\cdot\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$.

Ponieważ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\exp\left(\frac{k\pi i}{n}\right)\right) = \mathrm{Im}\frac{\exp\left(\frac{\pi i}{n}\right)+1}{1-\exp\left(\frac{\pi i}{n}\right)} =$

$$= \mathrm{Im}\frac{\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\frac{\pi}{n}}{\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) - i\cdot\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}},$$

więc $L = 4\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)$, co należało wykazać.

Jeżeli teraz zauważymy, że n-kąty foremne wpisane w okrąg w miarę wzrostu liczby n aproksymują go, a kolejne wielokątne przybliżają arkadę cykloidy odpowiadającą okręgowi, to otrzymujemy fakty **A** i **B**.

$\overline{z}\cdot z = 1$

$\overline{z} = z^{n-1}$

$\mathrm{Im}\,\overline{z} = -\,\mathrm{Im}\, z$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k = \frac{nz^{n+1} - (n+1)z^n + 1}{(1-z)^2}$

$\exp(2\pi i/n) = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\cdot\sin\dfrac{2\pi}{n}$