Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 1989

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1989.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 175 (WT=1,65) i 176 (WT=3,09) z numeru 9/1988

Adam Ruszel	– Krosno	45,46pkt
Andrzej Bonk	– Chełmża	44,73pkt
Zbigniew Surduka	– Czechowice	43,71pkt
Edward Orzechowski	– Warszawa	43,68pkt
Grzegorz Zakrzewski	– Trzcianka	43,36pkt
Adam Przeździecki	– Warszawa	42,85pkt
Rafał Latała	– Warszawa	39,81pkt

Pan Ruszel – po raz pierwszy, a pan Bonk – po raz trzeci (już dziewiąty Weteran Ligi matematycznej).

Zadania z matematyki nr 189, 190

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

189. Rozpatrujemy trójkąty T i czworokąty Q opisane na danym kole K. Wyznaczyć kąty oraz określić wzajemne położenie figur T i Q, dla których pole części wspólnej $T \cap Q$ jest minimalne.

190. Dane są liczby naturalne $m, n \geq 1$; zakładamy, że m jest liczbą nieparzystą. Czy liczby $2^m - 1$ i $2^n + 1$ muszą być względnie pierwsze?

Zadanie **190** zaproponował pan Andrzej Pawłowski z Zabrza.

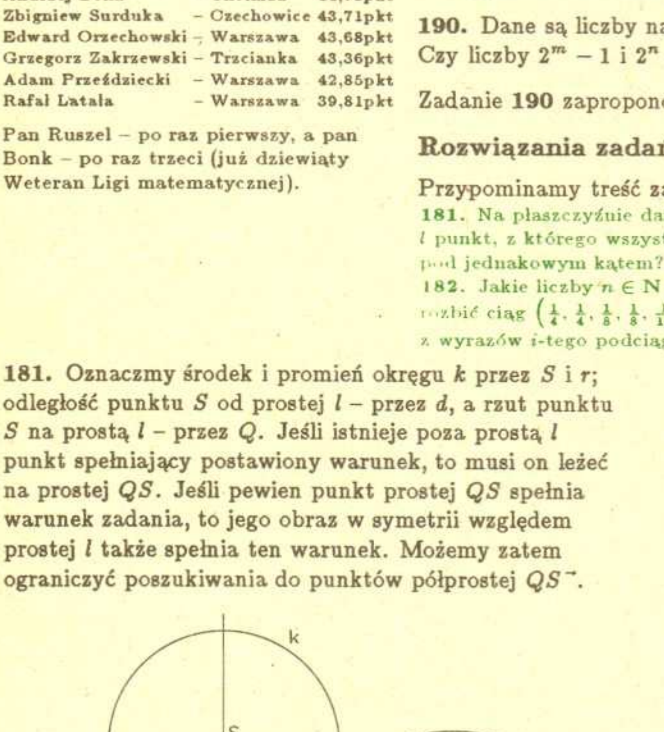
Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1988

Przypominamy treść zadań:

181. Na płaszczyźnie dany jest okrąg k oraz rozłączna z nim prosta l. Czy istnieje poza prostą l punkt, z którego wszystkie zawarte w l średnice okręgów stycznych zewnętrznie do k widać pod jednakowym kątem?

182. Jakie liczby $n \in \mathbb{N}$ mają własność: dla dowolnych liczb $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ o sumie 1 można rozbić ciąg $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$ na n podciągów tak, by suma szeregu utworzonego z wyrazów i-tego podciągu była równa a_i $(i = 1, \ldots, n)$?

181. Oznaczmy środek i promień okręgu k przez S i r; odległość punktu S od prostej l – przez d, a rzut punktu S na prostą l – przez Q. Jeśli istnieje poza prostą l punkt spełniający postawiony warunek, to musi on leżeć na prostej QS. Jeśli pewien punkt prostej QS spełnia warunek zadania, to jego obraz w symetrii względem prostej l także spełnia ten warunek. Możemy zatem ograniczyć poszukiwania do punktów półprostej $QS^{\to}$.



Niech P będzie dowolnym punktem tej półprostej (różnym od Q) i niech AB będzie jedną z rozpatrywanych w zadaniu średnic, a M – jej środkiem. Możemy przyjąć, że trójki punktów (S, Q, M) i (S, A, B) są dodatnio zorientowane. Przyjmijmy jeszcze oznaczenia: $|QP| = h$, $|QM| = m$, $|MA| = |MB| = x$, $\angle(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PA}) = \alpha$, $\angle(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PB}) = \beta$. Okrąg o środku M i promieniu x jest styczny do k, a więc $(x+r)^2 = |SM|^2 = d^2 + m^2$, czyli $m^2 - x^2 = r^2 - d^2 + 2rx$. Odcinek AB jest widoczny z punktu P pod kątem $\varphi = \beta - \alpha \in (0; \pi/2)$. Obliczmy tangens tego kąta:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{m+x}{h} - \frac{m-x}{h}}{1 + \frac{m-x}{h} \cdot \frac{m+x}{h}} =$$
$$= \frac{2hx}{h^2 + m^2 - x^2} = \frac{2hx}{h^2 + r^2 - d^2 + 2rx}.$$

Otrzymane wyrażenie ma wartość stałą (przy zmiennym x) wtedy i tyko wtedy, gdy $h^2 + r^2 - d^2 = 0$. Stąd odpowiedź: istnieją poza prostą l dwa punkty, z których rozważane średnice są widoczne pod jednakowym kątem; są to punkty P i P' położone na prostej QS symetrycznie względem punktu Q, w odległości $\sqrt{d^2 - r^2}$ od tego punktu.

182. Rozbicie, o jakim mowa, jest zawsze wykonalne, gdy $n \leq 3$. Dla $n = 1$ i $n = 2$ jest to oczywiste. Dla $n = 3$: jeżeli $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, to co najmniej dwie z liczb a_i nie przekraczają $1/2$ i można każdą z nich przedstawić jako sumę szeregu utworzonego z niektórych wyrazów ciągu $(1/4, 1/8, 1/16, \ldots)$; niewykorzystane wyrazy złożą się na trzecią z tych liczb. (Dopuszczamy podciągi puste.) Natomiast dla każdego $n \geq 4$ łatwo znaleźć takie liczby $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ $(\sum a_i = 1)$, żeby omawiane rozbicie nie istniało. Przykład: dla $n = 4$: $a_1 = a_2 = a_3 = 1/5$, $a_4 = 2/5$; dla $n \geq 5$: $a_1 = \ldots = a_n = 1/n$ (w każdym z tych przykładów jest niemożliwe „zmieszczenie" dwóch egzemplarzy liczby $1/4$ jako składników szeregów o sumach a_i).

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 73 (WT=1,88) i 74 (WT=2,33)
z numeru 9/1988

Adam Sikorski	– Lublin	36,96	pkt
Roman Musiał	– Katowice	36,67	pkt
Paweł Perkowski	– Szczecin	36,28	pkt
Piotr Koczyński	– Warszawa	33,28	pkt
Wiesław Kacprzak	– Kraków	32,92	pkt
Aleksander Surma	– Myszków	27,49	pkt
Dzierżysław Lipniacki	– Lublin	26,88	pkt
Jerzy Lipkowski	– Elbląg	23,40	pkt

Zadania z fizyki nr 87, 88

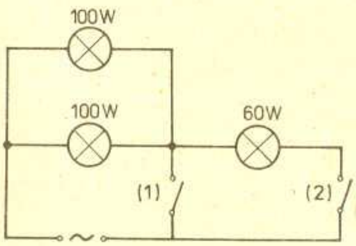
Redaguje dr Andrzej NADOLNY

87. Czy kosmonauta unoszący się swobodnie w przestrzeni kosmicznej (nie obracający się względem swego środka masy) może dokonać obrotu swego ciała, na przykład o 180°, nie wykorzystując żadnych oddziaływań z ciałami zewnętrznymi ani odrzutu? Jeśli jest to możliwe, to w jaki sposób?

88. Kwadratowa ramka o boku a z drutu miedzianego o polu przekroju poprzecznego S wiruje – ze stałą prędkością kątową ω – w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B wokół osi leżącej w płaszczyźnie ramki, równoległej do jednego z jej boków i prostopadłej do kierunku pola magnetycznego. Obliczyć maksymalną wartość momentu siły, jaki musi pokonać silniczek napędzający ramkę. Opór właściwy miedzi wynosi ρ.
Czy wynik ulegnie zmianie i jak, jeśli ramka będzie zawierała n zwojów cieńszego drutu, wykonanego z tej samej ilości miedzi, co ramka pierwotna?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1988

Przypominamy treść zadań:
79. Podłączając trójlampowy żyrandol z dwiema żarówkami 100–watowymi i jedną 60–watową do sieci zaopatrzonej w dwa wyłączniki stwierdzono, że żarówki 100 W świecą normalnie przy włączonym wyłączniku (1) oraz przy obu wyłącznikach włączonych, podczas gdy żarówka 60 W świeci tylko przy włączonym wyłączniku (2).
Podać schemat obwodu elektrycznego.
80. Jaka jest prędkość ultrachłodnych neutronów o energii kinetycznej 10^{-7} eV i jak zachowują się one w ziemskim polu grawitacyjnym?
Czy wiązka ultrachłodnych neutronów ulega dyfrakcji na kryształach?
W jaki sposób można by przechowywać takie neutrony przez pewien czas w ograniczonej przestrzeni?



79. Schemat poszukiwanego obwodu elektrycznego podany jest na rysunku. Przy włączonym wyłączniku (2) i wyłączonym wyłączniku (1) żarówka 60–watowa świeci w takim układzie tylko nieco słabiej niż normalnie, natomiast włókna żarówek 100–watowych nie grzeją się na tyle, aby ich świecenie było dostrzegalne przy normalnym oświetleniu. Związane jest to z dużym współczynnikiem temperaturowym oporu elektrycznego wolframu. Opór włókna zimnego jest wielokrotnie niższy od oporu włókna rozżarzonego, dzięki temu opór równolegle połączonych żarówek 100–watowych jest niewielki w porównaniu z oporem żarówki 60–watowej, a wydzielana na nich moc jest także odpowiednio mała.

80. Prędkość neutronu obliczamy ze wzoru $v = \sqrt{2E/m}$. Podstawiając wartość energii kinetycznej neutronu $E = 10^{-7}$ eV $= 10^{-7} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}$ J oraz masy neutronu (z tablic) $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, otrzymujemy $v = 4,4$ m/s $= 16$ km/h. Ciało rzucone z taką prędkością do góry uniesie się na wysokość $h = v^2/2\mathrm{g} \approx 1$ m ($\mathrm{g} = 9,81$ m/s^2).
Wnioskujemy stąd, że ultrachłodne neutrony poruszają się w ziemskim polu grawitacyjnym po torach parabolicznych – jak kulki makroskopowe o niedużych prędkościach.
Dyfrakcja cząstek na kryształach uzależniona jest od odpowiadającej im długości fali do Broglie'a $\lambda = \mathrm{h}/p$ ($\mathrm{h} = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s – stała Plancka, p – pęd cząstki).
Zauważalna dyfrakcja zachodzi wtedy, gdy długość fali de Broglie'a jest porównywalna z odległościami międzyatomowymi. W naszym przypadku $\lambda = \mathrm{h}/\sqrt{2mE} \approx 10^{-7}$ m.
Tymczasem odległości międzyatomowe w kryształach są rzędu 10^{-10} m, czyli o 3 rzędy wielkości mniejsze. Ultrachłodne neutrony „widzą" więc kryształ jako jednorodne ciało *nie ulegając* dyfrakcji na poszczególnych atomach.
Poszczególne substancje mają – podobnie jak dla światła – różne współczynniki załamania dla ultrachłodnych neutronów (tu uwidacznia się falowa natura tych cząstek). Dla większości substancji współczynniki załamania są mniejsze od jedności, a zatem odbijają one całkowicie neutrony padające pod odpowiednio dużym kątem (na zasadzie optycznego całkowitego wewnętrznego odbicia).
Przy bardzo małej prędkości padania (zależnej od rodzaju substancji) całkowite odbicie neutronów następuje nawet dla padania prostopadłego, dzięki temu ultrachłodne neutrony można przechowywać w odpowiednich „pudełkach". Sposobem na przechowywanie takich neutronów w ograniczonej przestrzeni byłoby także umieszczenie ich np. w ciekłym helu: dzięki zderzeniom neutronów z atomami helu ich dyfuzja poza pierwotny obszar zachodziłaby bardzo powoli.
Fizyka ultrachłodnych neutronów jest bardzo ciekawa, toteż w jednym z następnych numerów zamieścimy obszerniejszy artykuł na ten temat.