Patrz w niebo

Każdy łatwo uogólnia swoję obserwacje świata, np. bardzo łatwo wypowiada się opinie w rodzaju, że każdy rudy to fałszywy. Postęp nauki m.in. również polega na uogólnianiu, aczkolwiek nie tak prymitywnym. Jedno takie niezwykle ważne uogólnienie zostało sformułowane już dawno, a znane jest jako tzw. zasada kosmologiczna. Według tej zasady Wszechświat z każdego miejsca wygląda średnio tak samo. Nieświadome użycie tej zasady w pierwotnej formie przypisuje się nawet Kopernikowi, bowiem to on stwierdził, że pozycja Ziemi we Wszechświecie nie jest niczym wyróżniona. Dlatego zasada ta bywa też nazywana zasadą kopernikowską. Tak czy inaczej jest ona wysoce elegancka, prosta, twórcza i zgodna z obserwacjami na tyle, że wręcz trudno zdecydować się, czy traktować ją jako założenie, czy jako właśnie wniosek z obserwacji. Drugie założenie, które kilkadziesiąt lat temu narzucało się obserwatorom nieba, brzmi: Wszechświat jest statyczny. No bo przede wszystkim materia jest niezniszczalna, Wszechświat zachowuje się spokojnie i w ogóle chyba musi być pod jakimś względem „doskonały". Nic więc dziwnego, że Albert Einstein po ogłoszeniu swojej ogólnej teorii względności (1915) zaczął następnie szukać, czy może ona opisać Wszechświat jako całość przy jednoczesnym spełnieniu obu wspomnianych założeń. Okazało się, że (co prawda naginając nieco równania teorii względności) można otrzymać statyczny model Wszechświata i przez jakiś czas wydawało się, że wszystko się zgadza.
Jak się jednak okazało (zaobserwowanie ucieczki galaktyk i prace de Sittera nad grawitacją) założenie niezmienności Wszechświata w czasie musimy odrzucić. Zaproponowano dwie możliwości: Wielki Wybuch (Wszechświat miał początek punktowy w czasie i w przestrzeni) lub stacjonarność (Wszechświat ma być stale taki sam). W tym drugim przypadku w szczególności stała musiałaby być gęstość materii.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 77 ($WT=2{,}50$) i 78 ($WT=1{,}31$)
z numeru 11/1988

Adam Sikorski	– Lublin	44,70 pkt
Paweł Perkowski	– Szczecin	40,05 pkt
Roman Musiał	– Katowice	39,76 pkt
Wiesław Kacprzak	– Kraków	38,48 pkt
Piotr Koczyński	– Warszawa	34,59 pkt
Aleksander Surma	– Myszków	32,00 pkt
Dzierżysław Lipniacki	– Lublin	30,12 pkt
Jerzy Lipkowski	– Elbląg	27,92 pkt
Tomasz Wietecha	– Tarnów	25,15 pkt

Pan Sikorski jest dwunastym członkiem **Klubu 44**.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,

Klub 44

Szczegółowy regulamin **Klubu 44** zamieściliśmy w *Delcie* 1/1989, a jego skrót – we wszystkich numerach, w których są zadania ligowe (tj. z wyjątkiem numerów 6 i 7).

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/1989

Przypominamy treść zadań:

83. Cylindryczna, pionowo ustawiona beczka napełnia się z kranu w ciągu 10 minut, a opróżnia przez otwór w dnie w ciągu 15 minut. Co się stanie, jeśli będziemy napełniać z kranu beczkę z otwartym otworem?

84. Piłkarz potrafi kopnąć piłkę na maksymalną odległość Z. Jaki obszar położony za cienką, pionową ścianą o wysokości H i odległą o D od piłkarza jest objęty jej „cieniem", tzn. jest nieosiągalny przez piłkę? Zaniedbać opór powietrza, rozmiary piłki oraz założyć, że $Z > D > 2H$. Przedyskutować rozwiązanie w zależności od początkowej szybkości piłki.

83. Prędkość wypływu wody z otworu w dnie określa wzór Torricellego (otrzymany z przyrównania energii kinetycznej i potencjalnej) $v = 2\sqrt{gh}$, w którym g – przyspieszenie ziemskie, h – wysokość słupa wody. Stąd dla opróżniania $(\mathrm{d}h/\mathrm{d}t)_o = -C\sqrt{h}$, gdzie C – stała zależna od średnic beczki i otworu.
Czas opróżniania pełnej beczki o wysokości H wynosi

$$t_o = -\frac{1}{C}\int_H^0 \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = \frac{2}{C}\sqrt{H},$$

skąd

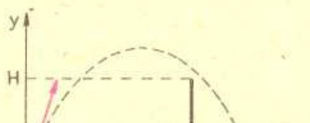
$$C = 2\sqrt{H}/t_o.$$

Podczas napełniania beczki z zamkniętym otworem $(\mathrm{d}h/\mathrm{d}t)_n = H/t_n$, gdzie t_n – czas napełniania.
Jeżeli jednocześnie będzie zachodziło napełnianie beczki i wypływ wody przez otwór, ustali się stan równowagi, w którym $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}h/\mathrm{d}t)_n + (\mathrm{d}h/\mathrm{d}t)_o = 0$. Z warunku tego znajdujemy wysokość słupa wody w stanie równowagi:

$$h = (t_o/t_n)^2 H/4.$$

Dla $t_o = 15$ min i $t_n = 10$ min mamy $h = (9/16)H$. Można wykazać, że osiągnięta równowaga dynamiczna ma charakter trwały.

84. W układzie współrzędnych (jak na rysunku) tor piłki opisany jest równaniem $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - x^2(1 + \mathrm{tg}^2\alpha)/(2Z)$, gdzie α jest kątem między początkową prędkością piłki a poziomem.



Podstawiając $x = D$, $y = H$ wyznaczamy dwie graniczne wartości tangensa tego kąta, dla których tor piłki dotyka wierzchołka ściany: $\mathrm{tg}\,\alpha_{1,2} = [1 \pm (1 - 2h - d^2)^{1/2}]/d$, przy czym $h = H/Z$, $d = D/Z$. Podstawiając do równania toru $y = 0$ oraz $\alpha = \alpha_{1,2}$ otrzymujemy współrzędne granicznych punktów upadku piłki: $x_{1,2} = 2Z\,\mathrm{tg}\,\alpha_{1,2}/(1 + \mathrm{tg}^2\alpha_{1,2})$.
Nieosiągalny dla piłki jest przedział wartości x: $x_2 \geq x \geq D$, a ponadto – jeśli $\mathrm{tg}\,\alpha_1 \geq 1$ – także $x \geq x_1$.
Jakościowa analiza wskazuje, że przy mniejszej początkowej prędkości piłki większe obszary będą dla niej niedostępne.

Dr Tomasz KWAST

Wobec rozszerzania się Wszechświata materia musiałaby stale być uzupełniana. Przyjęto więc, że powstaje ona z niczego w przestrzeni międzygalaktycznej. Brzmi to jak szaleństwo, niemniej jednak teoria stanu stacjonarnego była przez jakiś czas rozważana z całą powagą, gdyż po pierwsze – założenia jednorodności i stacjonarności wydawały się bardzo naturalne, eleganckie i zachęcające. Po drugie, przyjęcie ciągłej i powolnej kreacji materii wcale nie musi być większym szaleństwem, niż założenie jednorazowego i gwałtownego powstania całego Wszechświata. Wreszcie po trzecie, w jakim tempie materia musiałaby powstawać? Nietrudno to ocenić. Każda kula o promieniu R i zawierająca stałą masę M pęcznieje w takim tempie, że $\dot{R} = HR$, gdzie $H = 50\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s\cdot Mpc}} \cong 2\cdot 10^{-18}\mathrm{s}^{-1}$ jest stałą Hubble'a. Objętość takiej kuli rośnie w tempie $\dot{V} = \frac{4}{3}\pi\frac{d}{dt}(R^3) = 4\pi R^2 H$, gęstość materii spada więc w tempie $\dot{\rho} = M\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{V}\right) = -3H\rho$. Przyjmując obecną średnią gęstość Wszechświata $\rho = 5\cdot 10^{-27}\mathrm{kg/m^3}$ stwierdzamy, że $\dot{\rho} = -3\cdot 10^{-44}\mathrm{kg/m^3 s}$, a więc tyleż musiałoby się materii tworzyć. Zważywszy, że atom wodoru ma masę $1,7\cdot 10^{-27}\mathrm{kg}$, widzimy, iż w jednym metrze sześciennym musiałby powstać jeden atom w ciągu miliarda lat. Byłoby to, oczywiście, złamaniem zasady zachowania masy, ale tak nieznacznym, że nie stojącym w sprzeczności z żadnymi obserwacjami czy doświadczeniami. Zresztą sama zasada zachowania masy jest w dużym stopniu jedynie wyrazem naszych wierzeń.

Tak czy inaczej kres teorii stanu stacjonarnego położyły dopiero nowe obserwacje, głównie odkrycie promieniowania reliktowego (1965). W teorii tej nie było po prostu na nie miejsca. Pozostała nam więc zagadka Wielkiego Wybuchu i świadomość, że Wszechświat jest wprawdzie taki sam w każdym miejscu, ale nie w każdej chwili – ewoluuje on, miał „początek”, a czy będzie miał „koniec” – nie wiemy.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 179 (WT=2,58) i 180 (WT=1,60) z numeru 11/1988

Rafał Latała	– Warszawa	48,17 pkt
Piotr Kumor	– Olsztyn	45,34 pkt
Zbigniew Surduka	– Czechowice	43,71 pkt
Edward Orzechowski	– Warszawa	43,68 pkt
Adam Przeździecki	– Warszawa	42,85 pkt
Kazimierz Serbin	– Sanok	42,72 pkt
Jerzy Małopolski	– Kraków	40,86 pkt

Nowa twarz w **Klubie 44**: pan Rafał Latała, pan Kumor – po raz drugi.

$\sqrt{\sum!}=44$

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1989

Przypominamy treść zadań:

185. Wyznaczyć największą liczbę λ o tej własności, że każdy przedział domknięty $I \subset (0;1)$ można przekształcić przez jednokładność o środku 0 i skali będącej liczbą naturalną na przedział J o długości $\geq \lambda$, nie zawierający żadnej liczby całkowitej.

186. Podać warunki konieczne i dostateczne, jakie powinny spełniać liczby dodatnie S_1, S_2, S_3, S_4, aby istniał czworościan mający ściany o polach S_1, S_2, S_3, S_4.

185. Liczba $\lambda = \frac{1}{6}$ ma tę własność. Jeśli bowiem $\langle a;b\rangle$ jest przedziałem o długości $< \frac{1}{6}$, nie zawierającym liczby całkowitej, to przedział $\langle 2a;2b\rangle$ lub przedział $\langle 3a;3b\rangle$ także nie zawiera liczby całkowitej. Tak więc wychodząc od danego przedziału I i mnożąc jego końce przez 2 lub 3 otrzymamy po skończenie wielu takich operacjach przedział o długości $\geq \frac{1}{6}$, bez liczby całkowitej.
Przykład przedziału $I = \left\langle \frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\rangle$ pokazuje, że żadna liczba $\lambda > \frac{1}{6}$ nie ma omawianej własności.

186. „Warunek czworościanu”, czyli koniunkcja nierówności

$$S_1 < S_2 + S_3 + S_4\,, \qquad S_2 < S_3 + S_4 + S_1\,,$$
$$S_3 < S_4 + S_1 + S_2\,, \qquad S_4 < S_1 + S_2 + S_3$$

jest szukanym warunkiem koniecznym i dostatecznym dla istnienia żądanego czworościanu.
Konieczność. Rzuty dowolnych trzech ścian na płaszczyznę czwartej ściany pokrywają tę ścianę, a ich pola są mniejsze niż pola rzutowanych ścian.

Dostateczność. Możemy przyjąć, że
$S_1 \geq S_2 \geq S_3 \geq S_4 > 0, \quad S_1 < S_2 + S_3 + S_4.$
Rozważamy dwa przypadki.
1. $S_1 < S_2 + S_3$. Bierzemy trójkąt $\triangle$ o polu S_4 i o długościach boków proporcjonalnych do liczb S_1, S_2, S_3. Przez środek koła wpisanego w trójkąt $\triangle$ prowadzimy prostą l prostopadłą do płaszczyzny tego trójkąta. Ostrosłup o podstawie $\triangle$ i wierzchołku w dowolnym punkcie $P \in l$ ma pola ścian bocznych proporcjonalne do liczb S_1, S_2, S_3. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa zmienia się w sposób ciągły od wartości S_4 (przypadek zdegenerowany, gdy P leży w płaszczyźnie trójkąta $\triangle$) do nieskończoności. Przy pewnym położeniu punktu P przyjmuje więc wartość $S_1 + S_2 + S_3$ i wówczas ostrosłup $(\triangle, P)$ jest czworościanem o polach ścian S_1, S_2, S_3, S_4.
2. $S_1 \geq S_2 + S_3$. Niech teraz $\triangle$ będzie trójkątem równobocznym o polu S_1. Oznaczmy długość boku oraz wysokości trójkąta $\triangle$ odpowiednio przez a i h_1. Niech h_2, h_3, h_4 będą takimi liczbami, że $h_1 : h_2 : h_3 : h_4 = S_1 : S_2 : S_3 : S_4$ (zatem $h_1 \geq h_2 \geq h_3 \geq h_4 > 0,\ h_2 + h_3 \leq h_1 < h_2 + h_3 + h_4$). Wystarczy znaleźć w przestrzeni punkt P leżący w odległościach h_2, h_3, h_4 od prostych zawierających boki trójkąta $\triangle$; pola ścian bocznych ostrosłupa $(\triangle, P)$ będą wówczas wynosiły S_2, S_3, S_4.
Weźmy pod uwagę funkcję ciągłą

$$f(t) = \sum_{j=2}^{4}\sqrt{h_j^2 - t^2}, \quad t \in \langle 0; h_4\rangle.$$

Ponieważ $f(0) = h_2 + h_3 + h_4 > h_1, \quad f(h_4) < h_2 + h_3 \leq h_1$, zatem $f(h) = h_1$ dla pewnego $h \in (0;h_4)$. Przyjmijmy $d_j = \sqrt{h_j^2 - h^2}$ dla $j = 2,3,4$. Tak więc $d_2 + d_3 + d_4 = h_1$, a wobec tego istnieje punkt $Q \in \triangle$ leżący w odległościach d_2, d_3, d_4 od boków trójkąta $\triangle$. Umieszczamy punkt P w odległości h od płaszczyzny trójkąta $\triangle$ tak, aby punkt Q był rzutem punktu P na tę płaszczyznę. Odległości punktu P od boków $\triangle$ są równe $\sqrt{d_j^2 + h^2} = h_j$, $j = 2,3,4$, a o to nam chodziło.