O ciągach typu dwumianowego

Dr Maciej GRZESIAK

Czytelnikowi z pewnością znane są równości

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(zwane dwumianem Newtona). Nasuwa się pytanie, czy tylko wielomiany $p_n(x) = x^n$ mają własność

$$(*) \qquad p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Możemy je sprecyzować: jakie ciągi wielomianów $(p_n(x))$, takich że stopień $p_n(x)$ jest równy n, spełniają równość $(*)$?

O tym, że ciąg wielomianów (x^n) nie jest jedynym mającym własność $(*)$ (mówi się: **ciągiem wielomianów typu dwumianowego**), może się Czytelnik przekonać sprawdzając, że **silnie dolne**, to jest wielomiany

$$[x]_n = x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)$$

oraz **silnie górne**, czyli

$$[x]^n = x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)$$

tworzą ciągi wielomianów typu dwumianowego (czyli spełniają $(*)$).

Gdy x i y są liczbami naturalnymi, zależność

$$[x+y]_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]_n [y]_{n-k}$$

można otrzymać z bezpośrednich rozważań kombinatorycznych. Np. $[m]_n$ można interpretować jako liczbę funkcji różnowartościowych ze zbioru n-elementowego do zbioru m-elementowego ($m \geq n$). Wielkość $[m+l]_n$ ma interpretację jako liczba funkcji różnowartościowych ze zbioru n-elementowego do sumy zbiorów rozłącznych A i B, gdzie A ma m elementów, a B ma l elementów. Zbiór takich funkcji można przedstawić w postaci sumy $n+1$ zbiorów rozłącznych: k-ty zbiór składa się z funkcji mających k wartości w zbiorze A, a $n-k$ wartości w zbiorze B ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$). Ponieważ tych k wartości może być rozmieszczonych na $\binom{n}{k}$ miejscach, otrzymujemy nasz wzór. Podobnie można, dla x i y naturalnych, kombinatorycznie sprawdzić zależność $(*)$ dla silni górnych.

Aby podać sposób na poszukiwanie jeszcze innych ciągów wielomianów typu dwumianowego, zajmiemy się operatorami (dokładniej: operatorami liniowymi) niezmienniczymi względem przesunięć, a nawet tylko delta operatorami, na przestrzeni liniowej wielomianów. Rozszyfrujmy, co oznaczają te nazwy.

Przestrzeń liniowa wielomianów to zbiór wszystkich wielomianów (o współczynnikach z danego ciała – dla nas niech to będzie ciało liczb rzeczywistych albo zespolonych) z dwoma działaniami: zwykłym dodawaniem wielomianów i zwykłym mnożeniem wielomianu przez liczbę. **Operator liniowy** T na tej przestrzeni to przekształcenie tego zbioru wielomianów na niego samego spełniające dla dowolnych wielomianów p i q i dowolnych liczb a i b warunek

$$T(ap+bq) = aT(p) + bT(q).$$

Jednym z takich operatorów jest **operator przesunięcia** o a, oznaczany przez E^a i określony przez równość

$$E^a(p(x)) = p(x+a).$$

O operatorze T mówimy, że jest **niezmienniczy względem przesunięć**, gdy jest on przemienny z E^a, czyli gdy dla każdego wielomianu $p(x)$ mamy

$$T\Big(E^a\big(p(x)\big)\Big) = E^a\Big(T\big(p(x)\big)\Big),$$

co zapisuje się krócej $TE^a = E^aT$. **Delta operator** to taki operator Q niezmienniczy względem przesunięć, który spełnia warunek $Q(x) = const \neq 0$.

Przykładem delta operatora jest operator różniczkowania D, czyli operator określony przez warunek $D(p(x)) = p'(x)$. Istotnie:

$$D\Big(E^a\big(p(x)\big)\Big) = D\big(p(x+a)\big) = p'(x+a)\cdot(x+a)' = p'(x+a) =$$
$$= E^a\big(p'(x)\big) = E^a\Big(D\big(p(x)\big)\Big)$$

oraz $D(x) = 1$.

Dla delta operatorów wprowadza się pojęcie ich bazy. Mówimy, że ciąg wielomianów $(p_n(x))$ jest bazą operatora Q, gdy spełnia cztery warunki:

(1) stopień $p_n(x)$ jest n,
(2) $p_0(x) = 1$,
(3) $p_n(0) = 0$ dla $n > 0$,
(4) $Q\big(p_n(x)\big) = n \cdot p_{n-1}(x)$.

Rozwiązanie zadanie F 278.
Najpierw znajdziemy długość drogi R_{Al} cząstki α w aluminium. Ponieważ utrata energii przez cząstkę α na skutek powodowanej przez nią jonizacji ośrodka jest proporcjonalna do NZ, gdzie N jest liczbą atomów w 1 cm^3, a Z – ładunkiem jądra, więc możemy zapisać:

$$\frac{R_{\mathrm{Al}}}{R_{pow}} = \frac{(NZ)_{pow}}{(NZ)_{\mathrm{Al}}}.$$

Liczba reakcji jądrowych zachodzących w cienkiej warstwie o grubości x jest równa $n_\alpha N_{\mathrm{Al}} \cdot \sigma \cdot x$, co jest równe ilości n_p protonów, a x przyjmujemy w przybliżeniu równe R_{Al}. Stąd otrzymujemy

$$\sigma = \frac{n_p}{n_\alpha N_{\mathrm{Al}} R_{\mathrm{Al}}} =$$
$$= \frac{n_p Z_{\mathrm{Al}}}{n_\alpha (NZ)_{\mathrm{pow}} \cdot R_{pow}} = 4 \cdot 10^{-26} \mathrm{cm}^2$$

Rozwiązanie zadania M 549.

Oznaczmy $a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$; ponieważ $a_1 = 1$, wystarczy wykazać, że $a_{k+1} - a_k = \frac{1}{n+1}$. Mamy

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \right] \times \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \binom{n+1}{n+1} \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \binom{n+1}{n+1} \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}.$$

Zauważmy, że

$$\binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}.$$

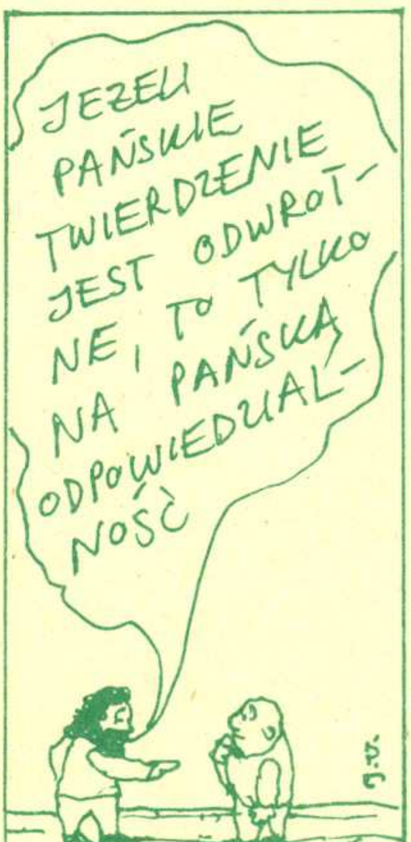
Dlatego ostatnia suma wynosi po prostu

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{k+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \left(- \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} (-(1-1)^{n+1} + 1) = \frac{1}{n+1}.$$

To kończy dowód.



Dla operatora D bazą jest więc np. ciąg (x^n). Pierwsze trzy warunki są oczywiste, a czwarty to

$$D(x^n) = (x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$$

Zauważmy, że dla dowolnego delta operatora Q warunek (4) pozwala na (jednoznaczne!) znalezienie jego bazy. Istotnie: współczynniki $a_{n,i}$ wielomianu $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{n,i} x^i$ można obliczyć (rekurencyjnie) z równości $Q(p_n(x)) = \sum_{i=0}^{n} a_{n,i} Q(x^i) = n \cdot p_{n-1}(x)$. Ponieważ $p_0(x) = 1$, więc wyliczamy kolejno $p_1, p_2, \ldots$ Ta konstrukcja pokazuje jednocześnie, że każdy delta operator ma dokładnie jedną bazę.

Trzeba wyjaśnić jeszcze rolę warunku (1). Otóż dzięki temu, że każdy wielomian bazy jest innego stopnia, oraz że występują w niej wielomiany wszystkich stopni, każdy wielomian (rozpatrywanej przestrzeni liniowej) da się przedstawić jako kombinacja liniowa wielomianów bazy (tj. suma pewnej skończonej liczby wielomianów bazy pomnożonych przez stosowne liczby). Wykorzystamy ten fakt, by udowodnić

Twierdzenie. Jeżeli ciąg $\left(p_n(x)\right)_{n=0}^{\infty}$ jest bazą dla pewnego delta operatora, to jest on typu dwumianowego.

Dowód. Niech $\left(p_n(x)\right)_{n=0}^{\infty}$ będzie bazą dla delta operatora Q. Z własności (3) przez iterację otrzymujemy:

$$Q^k(p_n(x)) = [n]_k p_{n-k}(x).$$

Stąd $\left[Q^n(p_n(x))\right]_{x=0} = n!$, $\left[Q^k(p_n(x))\right]_{x=0} = 0$ dla $k < n$. Zatem

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)}{k!} \left[Q^k(p_n(x))\right]_{x=0}.$$

Dowolny wielomian $p(x)$ jest kombinacją liniową wielomianów bazowych $p_k(x)$, więc także

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)}{k!} \left[Q^k(p(x))\right]_{x=0}.$$

Przyjmijmy teraz $p(x) = p_n(x+y)$, gdzie y jest ustalone. Wtedy

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)}{k!} \left[Q^k(p_n(x+y))\right]_{x=0}.$$

Ale $\left[Q^k(p_n(x+y))\right]_{x=0} = \left[Q^k E^y(p_n(x))\right]_{x=0} = \left[E^y Q^k(p_n(x))\right]_{x=0} =$

$$= \left[E^y([n]_k p_{n-k}(x))\right]_{x=0} = [n]_k \left[p_{n-k}(x+y)\right]_{x=0} =$$

$$= [n]_k p_{n-k}(y),$$

więc

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

czyli $(p_n(x))$ jest ciągiem typu dwumianowego, co kończy dowód.

Twierdzenie odwrotne jest również prawdziwe.

Podane na wstępie przykłady ciągów wielomianów typu dwumianowego uzyskać można właśnie za pomocą tego twierdzenia. Silnie dolne tworzą bazę dla delta operatora

$$\Delta(p(x)) = p(x+1) - p(x),$$

a silnie górne – dla delta operatora

$$\nabla(p(x)) = p(x) - p(x-1).$$

Czytelnik zechce sprawdzić, że Δ i ∇ są istotnie delta operatorami, oraz że silnie stanowią dla nich bazę. A warto też spróbować znaleźć jeszcze inny delta operator i, obliczając dla niego bazę, uzyskać jeszcze inny ciąg wielomianów typu dwumianowego.