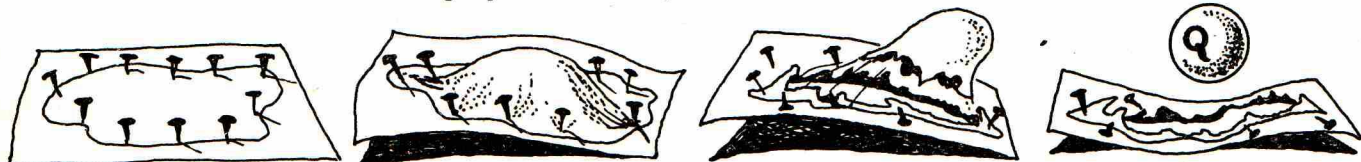


Dla figur trójwymiarowych rozmieszczenie punktów minimalnego układu stabilizującego jest zagadnieniem otwartym. Lukę tę mogą wypełnić Czytelnicy przysyłając do redakcji swoje pomysły z ich uzasadnieniem, dopisując na kopercie: *Układ stabilizujący* – wszystkie nadesłane listy przeczytam i prześlę swoją opinię.

Zwrócić tu trzeba uwagę na fakt, że w przestrzeni trójwymiarowej będziemy mieli do czynienia z figurami, których minimalny układ stabilizujący jest czteroelementowy, a także z figurami, dla których ten układ jest pięcio- i sześćoelementowy, przy czym nie jest pewne, czy do tych ostatnich należą tylko równoległosciany i nie jest jasne, dla jakich figur minimalny układ stabilizujący składa się z pięciu punktów.

Jako drugi temat dla Czytelników proponuję znalezienie w przestrzeni trójwymiarowej takich figur, których istotny układ stabilizujący jest co najwyżej trzynasto-, dwunasto-, ..., siedmioelementowy (figury, dla których taki układ jest co najwyżej sześćo-, pięcio- i czteroelementowy, pokazane są na rysunku 10, a figura z czternastoelementowym układem – na rysunku 11) i zbadanie, czy dla figury, dla której istnieje co najwyżej s -elementowy istotny układ stabilizujący ($s \in \{5, 6, \dots, 14\}$) istnieje też układ $(s - j)$ -elementowy dla $j \in \{1, 2, \dots, s - 4\}$. Dla kuli, na przykład, tak jest: istnieje sześciopunktowy istotny układ stabilizujący z punktami umieszczonymi w końcach trzech wzajemnie prostopadłych średnic, pięciopunktowy z trzema punktami na równiku i po jednym na każdym biegunie oraz czteropunktowy z punktami umieszczonymi w wierzchołkach czworościanu wpisanego w tę kulę (rzecz jasna, nie dowolnego – prawda?), ale czy dla innych figur jest tak również? I czy dla figur płaskich też tak jest?

Tematyka zaproponowana w artykule St. Fudalego może być, oczywiście, wykorzystana w pracach nadsyłanych na nasz Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki.



Przedstawiamy:

Zadanie z XX Międzynarodowej Olimpiady Fizycznej

t [°C]	p _i /p ₀	
	i = A	i = B
40	0,284	0,07278
90	1,476	0,6918

Dane są dwie nie mieszające się cieczce A i B. Prężności par nasyconych p_i (i = A lub B) tych cieczy spełniają zależność:

$$\ln(p_i/p_0) = \frac{a_i}{T} + b_i \quad (i = A \text{ lub } B),$$

gdzie p₀ oznacza ciśnienie normalne, T jest temperaturą bezwzględną pary, a a_i i b_i są pewnymi stałymi zależnymi od cieczy.

Wartości stosunku p_i/p₀ dla cieczy A i B w temperaturach 40°C i 90°C są podane w tabelce.

I Wyznacz temperaturę wrzenia cieczy A i cieczy B pod ciśnieniem p₀.

II Ciecze A i B wlane do naczynia, w którym uległy one rozwarstwieniu w sposób pokazany na rysunku 1. Powierzchnię cieczy B pokryto cienką warstwą nietlotnej cieczy C, nie mieszającej się z cieczami A i B, zapobiegającej swobodnemu parowaniu z górnej powierzchni cieczy B. Stosunek mas cząsteczkowych cieczy A i B (w fazie gazowej) wynosi

$$\gamma = \mu_A/\mu_B = 8.$$

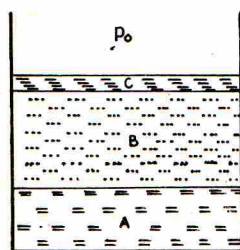
Masy cieczy A i B początkowo były równe i wynosiły m = 100 g. Wysokości słupów cieczy w naczyniu oraz gęstości cieczy są takie, że można przyjąć, iż ciśnienie w każdym punkcie naczynia praktycznie nie różni się od ciśnienia atmosferycznego równego ciśnieniu normalnemu p₀.

Do układu cieczy w naczyniu powoli, w sposób jednostajny, dostarczamy ciepło. Okazuje się, że temperatura t cieczy zmienia się w czasie τ w sposób przedstawiony na rysunku 2.

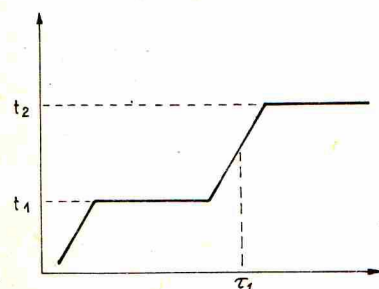
Wyznacz temperatury t₁ i t₂ odpowiadające poziomym odcinkom wykresu oraz masy cieczy A i B w chwili τ₁.

Uwaga: Zakładamy, że pary cieczy:

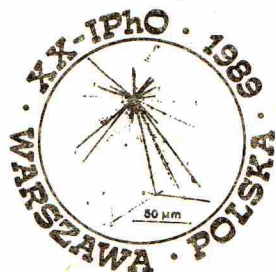
- spełniają prawo Daltona głoszące, że ciśnienie mieszaniny gazów jest równe sumie ciśnień, jakie miałyby te gazy osobno;
- aż do ciśnień odpowiadających odpowiednim ciśnieniom par nasyconych można traktować jako gazy doskonałe.



Rys. 1



Rys. 2



Rozwiązanie

I Ciecz wrze wtedy, gdy jej ciśnienie pary nasyconej zrówna się z ciśnieniem zewnętrznym. W celu wyznaczenia temperatury wrzenia danej cieczy należy więc znaleźć taką temperaturę T_{bi} , przy której $p_i/p_0 = 1$. Wtedy $\ln(p_i/p_0) = 0$, a zatem

$$T_{bi} = -\frac{a_i}{b_i}$$

Współczynniki a_i i b_i wyznaczamy na podstawie wzoru z treści zadania i danych liczbowych zawartych w tabelce, a mianowicie:

$$a_A \approx -3748,49 \text{ K}, \quad b_A \approx 10,711, \quad a_B \approx -5121,64 \text{ K}, \quad b_B \approx 13,735.$$

Stąd temperatury wrzenia cieczy wynoszą odpowiednio:

$$T_{bA} \approx 349,95 \text{ K} \approx 77^\circ\text{C}, \quad T_{bB} \approx 372,89 \text{ K} \approx 100^\circ\text{C}.$$

II Początkowa, nachylna część wykresu przedstawia ogrzewanie układu cieczy. Poziomy odcinek wykresu odpowiada stałej temperaturze, a więc sytuacji, gdy dostarczane ciepło zużywane jest na parowanie. Wobec istnienia warstewki nietolnej cieczy C nigdy nie zachodzi parowanie swobodne z górnej powierzchni cieczy B . Rozpatrzmy zatem parowanie z wnętrza cieczy.

Niech w cieczy A lub B , lub też na powierzchni rozdzielającej te cieczy powstanie, np. wskutek fluktuacji, pęcherzyk pary. Aby mógł się on wydostać na zewnątrz, ciśnienie w jego wnętrzu musi być równe ciśnieniu zewnętrznemu p_0 (lub nieco je przewyższać), w przeciwnym razie pęcherzyk zaniknie.

Ciśnienie wewnątrz pęcherzyka powstałego w cieczy A lub B jest równe prężności pary nasyconej odpowiedniej cieczy. Natomiast ciśnienie wewnątrz pęcherzyka powstałego na powierzchni rozdzielającej cieczy A i B jest równe sumie prężności par nasyconych obu tych cieczy. Wobec tego w miarę ogrzewania najpierw będą osiągać w swym wnętrzu ciśnienie p_0 te pęcherzyki, które powstają na powierzchni rozdzielającej obie cieczy. Temperatura t_1 odpowiada więc swego rodzaju wspólnemu wrzeniu cieczy na powierzchni je rozdzielającej i jest ona niższa od temperatur wrzenia cieczy A i B .

Aby wyznaczyć wartość t_1 , wystarczy stabelaryzować zależność sumy ciśnień par nasyconych cieczy A i B i stwierdzić, dla jakiej wartości temperatury osiąga ona ciśnienie p_0 .

Ze wzoru podanego w treści zadania mamy:

$$\frac{p_A}{p_0} = \exp\left(\frac{a_A}{T} + b_A\right), \quad \frac{p_B}{p_0} = \exp\left(\frac{a_B}{T} + b_B\right).$$

$p_A + p_B$ osiąga wartość p_0 , gdy

$$\frac{p_A}{p_0} + \frac{p_B}{p_0} = 1.$$

Tą drogą znajdujemy, że $t_1 = 67^\circ\text{C}$ (z dokładnością do pełnych $^\circ\text{C}$). Stąd ciśnienia par nasyconych cieczy A i B w każdym pęcherzyku powstającym na powierzchni rozdziału cieczy w temperaturze $t_1 = 67^\circ\text{C}$ wynoszą:

$$p_A \approx 0,734p_0, \quad p_B \approx 0,267p_0, \quad (p_A + p_B = 1,001p_0 \approx p_0).$$

Ciśnienia te nie zmieniają się podczas ruchu pęcherzyka w górę poprzez ciecz B , bo zależą one jedynie od temperatury, która jest stała. Objętość pęcherzyków podczas ich ruchu przez ciecz B również nie może ulec zmianie bez naruszenia związku $p_A + p_B \approx p_0$. Zatem stosunek mas par obu cieczy w każdym pęcherzyku jest taki sam. Dzieje się tak dopóty, dopóki jedna z cieczy zupełnie nie zamieni się w parę. Od tego momentu temperatura układu zacznie wzrastać (drugi, nachylny odcinek wykresu), ale pozostałej cieczy nie będzie ubywać, zanim nie zacznie ona wrzeć (wyższy, poziomy odcinek wykresu). Temperatura t_2 oznacza więc temperaturę wrzenia tej cieczy, która pozostanie w naczyniu.

Stosunek mas m_A/m_B par cieczy A i B w każdym pęcherzyku uchodzącym z cieczy w temperaturze t_1 jest proporcjonalny do gęstości tych par ρ_A/ρ_B . Ze względu na założenie, że pary można traktować jako gazy doskonałe, stosunek ten jest równy stosunkowi iloczynów ciśnień par przez ich masy cząsteczkowe:

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{p_A}{\rho_B} = \frac{p_A \mu_A}{p_B \mu_B} = \frac{p_A}{p_B} \gamma.$$

$$\frac{m_A}{m_B} \approx 22,0.$$

Liczbowo:

Widać, że cieczy A ubywa 22 razy szybciej niż cieczy B . Wyparowaniu 100 g cieczy A w trakcie wspólnego wrzenia z cieczą B (na powierzchni rozgraniczającej) towarzyszy wyparowanie 4,5 g cieczy B . W chwili τ_1 w naczyniu jest więc 95,5 g cieczy B . Cieczy A nie ma już wtedy w naczyniu. Temperatura t_2 jest więc temperaturą wrzenia cieczy B i wynosi 100°C .



Rozwiązanie zadania M 574. Niech $a_n = \underbrace{\ln \dots \ln n}_n$. Aby wyrażenie a_n było

określone, musi być: $\underbrace{\ln \dots \ln n}_{n-1} > 0$,

stad $\underbrace{\ln \dots \ln n}_{n-2} > 1$, a stad $\underbrace{\ln \dots \ln n}_{n-3} > e$

itd., aż w końcu $n > e^{e^{\dots}}$. Jest to

prawda dla $n \leq 3$. Natomiast dla $n = 4$ mamy już $4 < e^e$. Dla większych n

wykażemy indukcyjnie, że $e^{e^{\dots}} > n$.

Istotnie, ponieważ $e^x \geq 1 + x$, więc

$e^{e^{\dots}} \geq 1 + e^{e^{\dots}} > 1 + n$. To dowodzi,

że określone są tylko a_1, a_2 i a_3 .