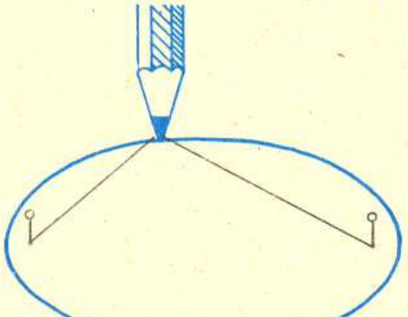
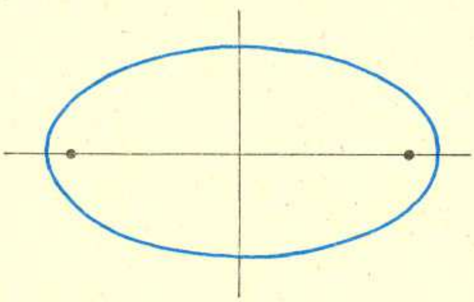
mała delta

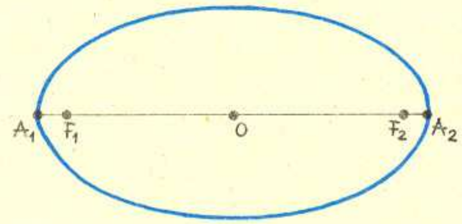
Dwie szpilki i nitka



to przyrząd, za pomocą którego można narysować elipsę. Wystarczy końce nitki przywiązać do wbitych w stół (może lepiej wziąć jakąś podkładkę, np. kawałek grubej tektury czy dykty) szpilek i narysować to, co zakreśli napinający nitkę ołówek. Elipsa jest zatem wyznaczona przez dwa punkty (nazywane ogniskami) i długość nitki.



Już z tego określenia wynika, że elipsa ma dwie osie symetrii. Każda bowiem symetria, która ma nałożyć elipsę na nią samą, musi nakładać ogniska na ogniska. A układ dwóch punktów ma dwie osie symetrii: prostą zawierającą te dwa punkty i symetralną tych punktów. Cięciwa elipsy zawarta w pierwszej z nich nazywa się dużą osią elipsy, a zawarta w drugiej – małą osią. Osie symetrii elipsy są prostopadłe (w ogóle jeśli figura ma dokładnie dwie osie symetrii, to muszą one być prostopadłe – dlaczego?). Elipsa ma więc środek symetrii – ich punkt przecięcia.



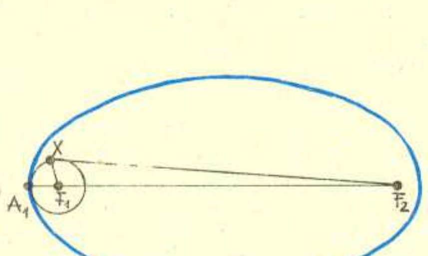
Punkty leżące na końcach osi elipsy nazywają się jej wierzchołkami. Sprawdźmy, jak daleko leżą od środka elipsy wierzchołki na dużej osi. Jeśli F_1 i F_2 są ogniskami elipsy, O – jej środkiem, a A_1 i A_2 wierzchołkami na dużej osi, to, oczywiście, $OA_1 = OA_2$. Oznaczmy długość tego odcinka przez a. Okazuje się, że $2a$ to długość nitki. Istotnie, gdy rysujący elipsę ołówek znajdzie się w A_1, cała nitka będzie miała długość

$$A_1F_1 + A_1F_2 = A_1F_1 + A_1F_1 + F_1F_2 =$$

$$= A_1F_1 + A_2F_2 + F_1F_2 = A_1F_1 + F_1F_2 + F_2A_2 =$$

$$= A_1A_2 = 2 \cdot OA_1$$

($A_1F_1 = A_2F_2$, bo O jest środkiem symetrii). Nitka ma zatem długość taką, jak duża oś elipsy.

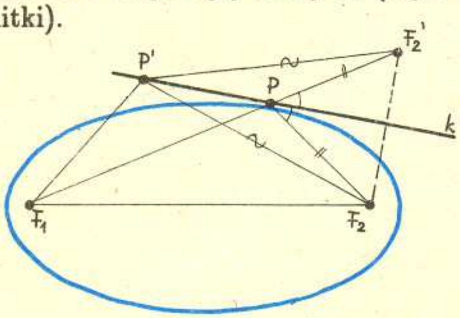


Wierzchołki dużej osi są punktami elipsy położonymi najbliżej ognisk. Rzeczywiście – narysujmy okrąg o środku F_1 przechodzący przez A_1. Dowolny jego punkt X spełnia nierówność

$$XF_1 + XF_2 = A_1F_1 + XF_2 < 2a\,,$$

bo XF_2 jest krótszy od A_1F_2. Zatem punkt X leży wewnątrz elipsy.

Przez dowolny punkt elipsy można cyrklem i linijką poprowadzić do niej styczną i to nie wykorzystując wcale samej elipsy, a tylko jej ogniska i długość jej dużej osi (czyli długość nitki).



Narysujmy dwusieczną k kąta zewnętrznego trójkąta F_1PF_2 przy wierzchołku P, gdzie P jest dowolnym punktem elipsy (sama elipsa nie musi wcale być narysowana) – to właśnie jest styczna do elipsy w punkcie P (dwusieczną kąta można, oczywiście, narysować cyrklem i linijką). Dlaczego jest to styczna? Narysujmy obraz symetryczny F_2' ogniska F_2 względem k. Oczywiście,

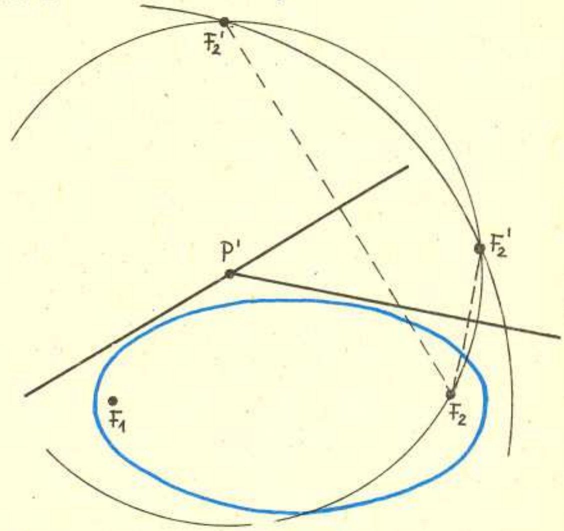
$$F_1F_2' = F_1P + PF_2' = F_1P + PF_2 = 2a,$$

bo P leży na elipsie. Weźmy teraz dowolny inny punkt P' prostej k. Mamy

$$F_1P' + P'F_2 = F_1P' + P'F_2' > F_1F_2' = 2a,$$

a więc punkt P' leży na zewnątrz elipsy.

Cyrkiel i linijka wystarczają również do wykreślenia stycznej do elipsy przechodzącej przez dowolny punkt P' leżący na zewnątrz elipsy. Obrane oznaczenie wskazuje, że skorzystamy z poprzedniego rozważania. I znów wcale nie będzie nam potrzebna sama elipsa, lecz tylko jej ogniska i długość dużej osi. Poszukamy mianowicie punktu F_2'. Wiemy już, że $F_1F_2' = 2a$, wiemy też, że $P'F_2 = P'F_2'$. Zatem wystarczy narysować okrąg o środku F_1 i promieniu $2a$ i okrąg o środku P' i promieniu $P'F_2$. Ich przecięcie to właśnie punkt F_2', a przecież styczna jest symetralną tego odcinka. A że otrzymaliśmy dwa punkty? Nic dziwnego – przecież przez punkt na zewnątrz elipsy można do niej poprowadzić dwie styczne.

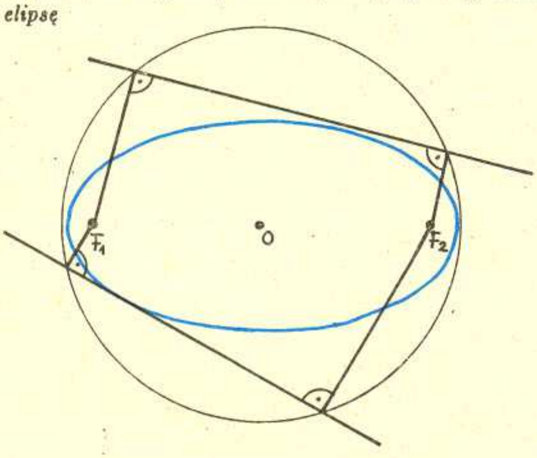


Jak widać, dwa ogniska i długość dużej osi, czyli dwie szpilki i nitka, wystarczają do tego, by kreślić osie symetrii elipsy, jej wierzchołki (dwa znaleźliśmy – jak znaleźć, bez rysowania elipsy, dwa pozostałe?), a także styczne do elipsy.

Dalsze konstrukcje zechcą Czytelnicy obmyślić sami. Dobrze jednak, gdy najpierw udowodnią dwa proste twierdzenia (proste, bo ich dowód nie jest bardziej skomplikowany od podanych wyżej).

Pierwsze jest takie:

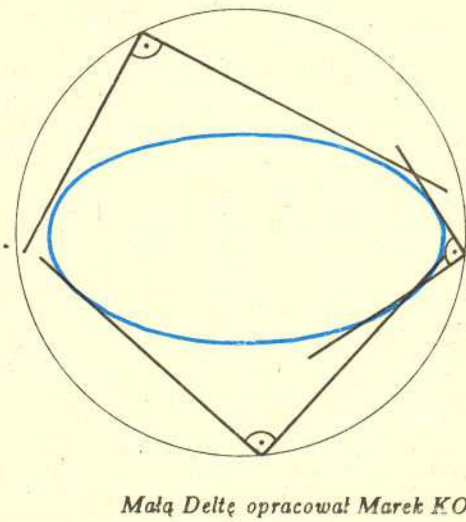
Rzuty prostokątne ognisk na wszystkie styczne do elipsy leżą na jednym okręgu – jest to najmniejszy okrąg zawierający elipsę



(w istocie dowód jest już prawie zrobiony, wystarczy na jednym z poprzednich rysunków dorysować jedną linię – ale na którym?).

A oto drugie (tu już trzeba samemu):

Punkty, z których widać elipsę pod kątem prostym, tworzą okrąg.



Małą Deltę opracował Marek KORDOS