Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1991

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 199 (WT=2,27) i 200 (WT=2,06) z numeru 4/1990

Jerzy Janowicz	– Bolesławiec	45,82 pkt
Andrzej Krzysztofowicz	– Gdańsk	45,23 pkt
Adam Czornik	– Bytom	43,59 pkt
Kazimierz Serbin	– Sanok	43,36 pkt
Henryk Kornacki	– Augustów	43,35 pkt
Adrian Langer	– Nisko	38,75 pkt

Siedem pełnych rund! Serdecznie gratulujemy panu Janowiczowi. A także panu Krzysztofowiczowi, dzięki któremu liczba członków Klubu 44 M zaokrągliła się do 60.

Zadania z matematyki nr 213, 214

Redaguje Marcin E. KUCZMA

213. Rozstrzygnąć, czy dla każdej pary funkcji różniczkowalnych $f,g:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ istnieje funkcja różniczkowalna $h:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$, której pochodna jest równa iloczynowi pochodnych funkcji f i g.

214. Obliczyć sumę

$$\sum_{A,B\subset\{1,\ldots,n\}} |A\cup B|;$$

n jest ustaloną liczbą naturalną; symbol $|A\cup B|$ oznacza moc (liczbę elementów) zbioru $A\cup B$, a sumowanie rozciąga się na wszystkie pary uporządkowane podzbiorów zbioru $\{1,\ldots,n\}$.

Zadanie **214** zaproponował pan Werner Mnich z Opola.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1990

Przypominamy treść zadań:

209. Czy istnieje w $\mathbf{R}^3$ zbiór domknięty, którego część wspólna z dowolną płaszczyzną jest zbiorem skończonym, niepustym?

210. Niech $m,n\geq 1$ będą liczbami naturalnymi, $d=\mathrm{NWD}(m,n)$, $u=2^m-1$, $v=2^n+1$.
(a) Dowieść, że $\mathrm{NWD}(u,v)=1$, gdy m/d jest liczbą nieparzystą.
(b) Obliczyć $\mathrm{NWD}(u,v)$, gdy m/d jest liczbą parzystą.

209. Przykładem takiego zbioru może być krzywa K o parametryzacji:

$$x=t^5,\quad y=t^3,\quad z=t\qquad(-\infty<t<+\infty).$$

Dowolna płaszczyzna P jest wyznaczona przez równanie postaci $ax+by+cz+d=0$, w którym co najmniej jeden ze współczynników a,b,c jest różny od zera. Część wspólna $K\cap P$ składa się z punktów krzywej K odpowiadających tym wartościom parametru t, które spełniają równanie $at^5+bt^3+ct+d=0$. Lewa strona jest wielomianem stopnia nieparzystego, zatem zbiór jego pierwiastków (rzeczywistych) jest skończony, niepusty.

210. Pisząc $m=2^kq$, $n=2^lr$ (q,r nieparzyste, $k,l\geq 0$) mamy

$$d=2^{\min(k,l)}\cdot\mathrm{NWD}(q,r).$$

Iloraz m/d jest liczbą nieparzystą wtedy i tylko wtedy, gdy $k\leq l$.

Oznaczmy: $\mathrm{NWD}(u,v)=w$; jest to liczba nieparzysta.

(a) Należy wykazać, że jeśli $k\leq l$, to $w=1$.

Dowód. Kongruencję $2^m\equiv 1 \pmod w$ podnosimy stronami do potęgi o wykładniku $2^{l-k}r$; kongruencję $2^n\equiv -1 \pmod w$ podnosimy stronami do potęgi q. W obu przypadkach dostajemy po lewej stronie to samo wyrażenie, natomiast po prawej stronie otrzymujemy raz 1, drugi raz -1. Stąd w, jako liczba nieparzysta, musi być równa 1.

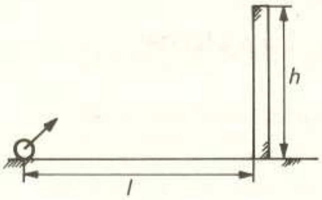
(b) Zakładając, że $k>l$, mamy wyznaczyć wartość w. Wykażemy, że $w=2^d+1$.

Dowód. Teraz $d=2^l\cdot\mathrm{NWD}(q,r)$. Oznaczmy: $2^d=c$, $m/d=a$, $n/d=b$.

Zauważmy, że b jest nieparzyste, a więc liczba $v=c^b+1$ dzieli się przez $c+1$; natomiast a jest parzyste, zatem liczba $u=c^a-1$ dzieli się przez c^2-1, więc i przez $c+1$. To dowodzi, że w dzieli się przez $c+1$.

Liczby a i b są względnie pierwsze; wobec tego $ax-by=1$ dla pewnych liczb naturalnych x,y (przy tym y musi być nieparzyste). Liczba w, jako wspólny dzielnik liczb $u=c^a-1$ oraz $v=c^b+1$, dzieli także liczby $c^{ax}-1$ oraz $c^{by}+1$; dzieli więc ich sumę, czyli liczbę $c^{ax}+c^{by}=$ $=c^{by}(c+1)=2^{bdy}(c+1)$. Ponieważ w jest liczbą nieparzystą, musi dzielić czynnik $c+1$.

W ten sposób stwierdziliśmy, że każda z liczb w, $c+1$ jest podzielna przez drugą, czyli że liczby te są równe. A to właśnie mieliśmy wykazać.



Zadania z fizyki nr 111, 112

Redaguje Jerzy BROJAN

111. W odległości l od leżącej na ziemi piłki znajduje się płot o wysokości h. Jaka jest minimalna prędkość, jaką trzeba nadać piłce, aby mogła przelecieć ponad płotem?

112. Opisz wady obrazu dyfrakcyjnego wynikające z następujących wad siatki dyfrakcyjnej:

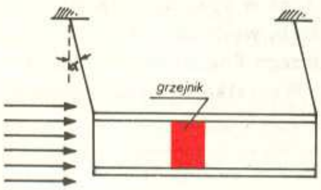
a) Rysy nierówno odległe. Rozważ przypadek, gdy na przemian występuje nieco większa i nieco mniejsza odległość, ewentualnie także przypadek, gdy co trzecia odległość jest nieco inna od dwóch poprzednich.

b) Rysy nierówno głębokie. Rozważ podobne przypadki, jak poprzednio.

Czy istnieje doświadczalna możliwość rozróżnienia, która z ewentualności a) i b) jest przyczyną obserwowanej wady obrazu?

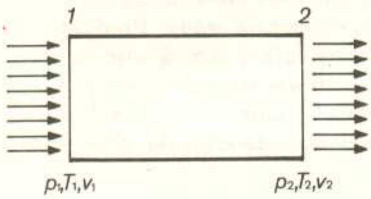
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1990

Przypominamy treść zadań:



107. Lekki cylinder wykonany z materiału izolującego cieplnie jest zawieszony na dwóch nitkach jak na rysunku. Na wewnętrznej powierzchni cylindra w połowie jego długości znajduje się grzejnik elektryczny w kształcie pierścienia. Umieszczenie cylindra w laminarnym strumieniu powietrza skierowanym wzdłuż jego osi powoduje odchylenie się nici zawieszenia od pionu o pewien kąt α. Czy włączenie zasilania grzejnika będzie miało wpływ na ten kąt, a jeśli tak, to jaki?

108. Rozwiązanie problemu stanowiącego treść zadania 108 zostanie przedstawione w *Małej Delcie* w następnym numerze.



107. Przy włączonym grzejniku powietrze wewnątrz cylindra ogrzewa się i rozszerza. W rezultacie szybkość jego wypływu (z prawego końca cylindra) jest większa, aniżeli w przypadku wyłączonego grzejnika. Dodatkowy pęd powietrze to uzyskuje w procesie oddziaływania z cylindrem (grzejnikiem). Na cylinder działa zatem siła skierowana w lewo, która powoduje zmniejszenie kąta α.

Spróbujmy to poprzeć obliczeniami na podstawie uproszczonego modelu (patrz rysunek). Oznaczmy pole poprzecznego (wewnętrznego) przekroju cylindra przez S, ponadto ciśnienia, temperatury i prędkości powietrza na lewym (1) oraz prawym (2) końcu cylindra odpowiednio przez p_1, T_1, v_1 oraz p_2, T_2, v_2 (rozpatrujemy prędkości i siły działające wzdłuż osi cylindra, przyjmując za dodatni zwrot w prawo).

Niech przez cylinder przepływa w jednostce czasu masa m powietrza. Przyrost pędu tego powietrza w cylindrze wynosi

$$m(v_2 - v_1) = (p_1 - p_2)S - F\,,$$

gdzie $-F$ jest siłą oddziaływania cylindra na powietrze w nim przepływające. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki na cylinder działa ze strony powietrza siła $+F$, która powoduje odchylenie nitek zawieszenia.

Na podstawie równania Clapeyrona mamy

$$\frac{p_1 S v_1}{T_1} = \frac{p_2 S v_2}{T_2}\,.$$

powyższych równań uzyskujemy

$$(\star)\qquad F = (p_1 - p_2)S - m v_1\left(\frac{T_2 p_1}{T_1 p_2} - 1\right).$$

Można przyjąć $p_2 = \text{const}$ (ciśnienie atmosferyczne) oraz $\Delta p = p_1 - p_2 = \text{const}$ (związane ze stałością strumienia nadmuchu) oraz ponadto $\Delta p \ll p_2$. W tej sytuacji pierwszy człon wyrażenia $(\star)$ jest stały, a zachowanie drugiego członu przy wzroście wartości stosunku T_2/T_1 poczynając od jedności określone jest przez wyrażenie w nawiasie.

Wynika stąd, że podgrzewanie powietrza wewnątrz cylindra, pociągające za sobą wzrost wartości stosunku T_2/T_1, powoduje zmniejszenie wartości siły F.

Doświadczalnie daje się uzyskać wręcz zmianę znaku siły F (kąt α także zmienia wówczas znak).

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 99 (WT=2,35), 100 (WT=2,80), 101 (WT=2,24) i 102 (WT=2,28) z numerów 5/1990 i 6/1990

Adam Sikorski	– Lublin	49,19 pkt
Przemysław Gworys	– Częstochowa	43,00 pkt
Andrzej Borowski	– Aleksandrów Kuj.	42,97 pkt
Leszek Motyka	– Kraków	36,43 pkt
Mariusz Bogacz	– Pińczów	31,91 pkt
Paweł Perkowski	– Szczecin	23,25 pkt
Dzierżysław Lipniacki	– Lublin	20,33 pkt

Pan Sikorski po raz drugi przekroczył 44 punkty (po zadaniach 99, 100).