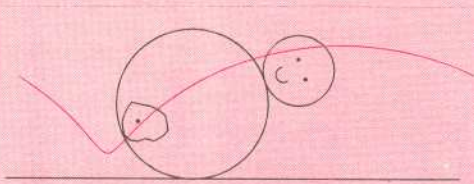
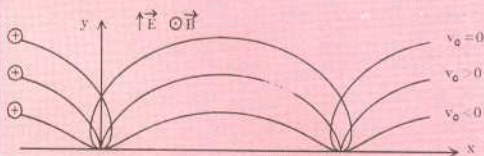


Jest też torem ruchu środka ciężkości ciężarka powodującego ruch periodyczny urządzeń działających tak, jak „Wańka-Wstańka”.



Rys. 21

Wszystkie trzy odmiany cykloidy są torami ruchu cząstki naładowanej dodatnio w skrzyżowanym polu elektrycznym i magnetycznym. Odmiana cykloidy zależy tam od prędkości początkowej cząstki (rys. 22). Kształt cykloidy nadawany jest też często zębom listw zębatych używanych w przekładniach w celu zminimalizowania tarcia (zębom kół zębatych nadawane są kształty epi- i hipocykloid).



Rys. 22

Ponieważ odmiany cykloidy definiuje się jako trajektorie punktu leżącego wewnątrz, na zewnątrz lub na brzegu koła, wobec tego punkty kreślące każdą z trzech odmian cykloidy możemy odnaleźć na kole poruszającym się po szynie.

Wszystkie trzy odmiany cykloidy możemy też dostać jako trajektorie punktu leżącego na brzegu koła. Jeśli koło toczy się po prostej bez poślizgu, dostajemy cykloidę zwyczajną. Jeżeli natomiast z poślizgiem zgodnym z kierunkiem ruchu, dostajemy cykloidę skróconą, a jeśli z poślizgiem przeciwnym do kierunku ruchu – wydłużoną. Poślizg ten rozumiemy jako różnicę między prędkością ruchu postępowego i prędkością ruchu obrotowego toczącego się koła. Dlatego zamiast rozważać ruch punktu leżącego na toczącym się kole można rozważać ruch złożony z ruchu postępowego środka koła z prędkością v_1 i ruchu obrotowego koła wokół jego środka z prędkością v_2 . Taka właśnie interpretacja była stosowana w epicykloidalnych modelach systemu planetarnego.

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Szczegółowy regulamin Klubu 44 zamieściliśmy w *Delcie* 7/1990, a jego skrót – we wszystkich numerach, w których są zadania ligowe (to jest, tradycyjnie, z wyjątkiem numerów 6 i 7).



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 211 (WT=3,28) i 212 (WT=2,71) z numeru 10/1990

Mariusz Zajac	Pruszków 42,95
Tomasz Grzesiak	Kraków 41,48
Przemysław Gadziński	Sroda Śl. 40,05
Paweł Kubit	Krosno 39,68

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1991

Przypominamy treść zadań:

217. Wyznaczyć maksimum wyrażenia

$$w^2(w^2 + 1)^{-2} + x^2(x^2 + 1)^{-2} + y^2(y^2 + 1)^{-2} + z^2(z^2 + 1)^{-2}$$

po wszystkich czwórkach liczb dodatnich takich, że $w + x + y + z = 2$.

218. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że jeśli n jest liczbą naturalną, a $x = \sqrt{n}$ nie jest liczbą naturalną, to różnica $[(x + [x])^p] - 2[x]$ dzieli się przez $2p$.

217. Badając znak pierwszej i drugiej pochodnej funkcji

$f(t) = (t^2 + 1)^{-2}t^2$ w przedziale $(0; 2)$ stwierdzamy, że

(1) f rośnie w $(0; 1)$, maleje w $(1; 2)$;

(2) f ma dwa punkty przegięcia $t_1 \in (\frac{1}{6}; \frac{1}{2})$, $t_2 \in (1; 2)$,

jest wypukła w $(0; t_1)$ i $(t_2; 2)$, wklęsła w $(t_1; t_2)$.

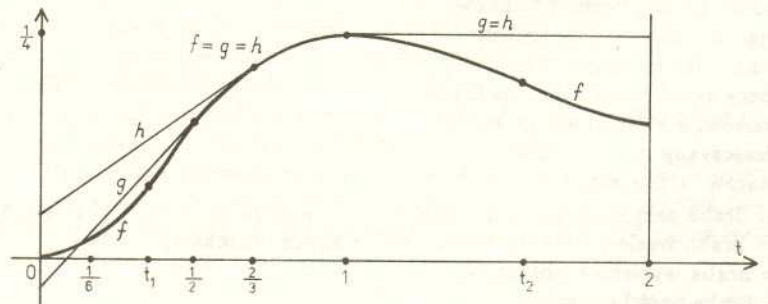
Weźmy pod uwagę funkcje wklęsłe g i h , określone na przedziale $(0; 2)$ wzorami

$$g(t) = \begin{cases} f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(t - \frac{1}{2}) = \frac{4}{125}(12t - 1) & \text{dla } t \in (0; \frac{1}{2}), \\ f(t) & \text{dla } t \in (\frac{1}{2}; 1), \\ \frac{1}{4} & \text{dla } t \in (1; 2), \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} f(\frac{2}{3}) + f'(\frac{2}{3})(t - \frac{2}{3}) = \frac{108}{2107}(5t + 1) & \text{dla } t \in (0; \frac{2}{3}), \\ f(t) & \text{dla } t \in (\frac{2}{3}; 1), \\ \frac{1}{4} & \text{dla } t \in (1; 2). \end{cases}$$

(Wykres każdej z nich jest sumą kawałka wykresu funkcji f oraz dwóch odcinków stycznych.) Oczywiście, $g \leq h$. Ponieważ $g(\frac{1}{6}) > f(\frac{1}{6})$, zatem na mocy (2)

(3) $f(t) \leq g(t) \leq h(t)$ dla $t \in (\frac{1}{6}; 2)$.



Oznaczmy badaną sumę $f(w) + f(x) + f(y) + f(z)$ przez $F(w, x, y, z)$. Możemy przyjąć, że $w \leq x \leq y \leq z$. Rozważymy trzy przypadki:

1. $w \geq \frac{1}{6}$. Z nierówności (3) i z wklęsłości funkcji g mamy:

$$F(w, x, y, z) \leq g(w) + g(x) + g(y) + g(z) \leq 4g\left(\frac{w+x+y+z}{4}\right) = 4g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{25}$$

(równość zachodzi, gdy $w = x = y = z = \frac{1}{2}$).

2. $w < \frac{1}{6} \leq x$; wówczas $f(w) < w^2 < \frac{1}{6}w$. Z nierówności (3) i z wklęsłości funkcji h otrzymujemy

$$F(w, x, y, z) < \frac{1}{6}w + h(x) + h(y) + h(z) \leq \frac{1}{6}w + 3h\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = \frac{1}{6}w + 3h\left(\frac{2-w}{3}\right) = \frac{108}{169} + \left(\frac{1}{6} - \frac{540}{2197}\right)w < \frac{108}{169} < \frac{16}{25}$$

3. $w \leq x < \frac{1}{6}$. Wtedy, zgodnie z (1),

$$F(w, x, y, z) < 2f(1) + 2f\left(\frac{1}{6}\right) < \frac{16}{25}$$

Konkluzja: F osiąga maksimum równe $\frac{16}{25}$ przy $w = x = y = z = \frac{1}{2}$.

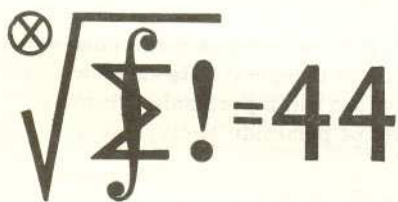
218. Oznaczając: $s = ([x] + x)^p$, $r = ([x] - x)^p$ mamy

$$\frac{s+r}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} ([x]^{p-k} x^k + [x]^{p-k} (-x)^k) = \sum_{j=0}^{\lfloor p/2 \rfloor} \binom{p}{2j} [x]^{p-2j} x^{2j}$$

W otrzymanej sumie wszystkie składniki są liczbami całkowitymi. Zatem $(s+r)/2$ jest liczbą całkowitą. Współczynniki $\binom{p}{2j}$ dla $1 \leq j < p/2$ są podzielne przez p . Stąd i z twierdzenia Fermata:

$$\frac{s+r}{2} \equiv [x]^p \equiv [x] \pmod{p},$$

więc $s+r \equiv 2[x] \pmod{2p}$; a ponieważ $-1 < r < 0$, zatem $[s] \equiv 2[x] \pmod{2p}$. Jest to teza zadania.



Redaguje Jerzy BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1991

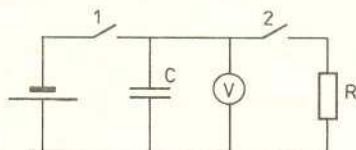
Przypominamy treść zadań:

115. Opisać metodę pomiaru prędkości pocisku karabinowego z wykorzystaniem woltomierza, kondensatora, baterijki, opornika, pasków folii aluminiowej i taśmy mierniczej lub długiej linijki. Należy przedstawić schemat obwodu i podać wzór, z którego można obliczyć prędkość pocisku. Jeśli woltomierz ma opór 100 k Ω , to jak należy wybrać wartości oporu opornika i pojemności kondensatora, aby pomiar był najłatwiejszy i najdokładniejszy?

116. Spośród różnych stanów polaryzacji fali elektromagnetycznej wyróżniamy polaryzację liniową (gdy pole elektryczne drga wzdłuż określonej osi prostopadłej do kierunku fali) i polaryzację kołową (gdy pole elektryczne obraca się w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku fali, nie zmieniając wartości).

Wykazać, że można wytworzyć falę spolaryzowaną kołowo przepuszczając falę spolaryzowaną liniowo przez obracający się polaroid i rozkładając otrzymaną falę na składowe harmoniczne. Obliczyć amplitudy i częstotliwości tych składowych, jeśli dana jest amplituda A i częstotliwość ω fali padającej, oraz prędkość kątowna polaroidu Ω .

115. Należy na drodze pocisku umieścić kolejno dwa paski folii oznaczone na podanym obok schemacie jako klucze 1 i 2. Gdy klucze są zamknięte (tzn. paski nienaruszone), kondensator jest naładowany do napięcia baterii U_0 .



Równania krzywych cykloidalnych

Łatwo znaleźć równania cykloid w postaci parametrycznej, które są najwygodniejsze do badania własności tych krzywych. Jeśli przyjąć, że koło toczy się po osi OX bez poślizgu, a najniższe położenie punktu kreślącego osiągnięte jest w chwili, gdy koło przechodzi przez punkt O , to równania te mają postać:

$$x = rt - d \sin t,$$

$$y = r - d \cos t,$$

gdzie r oznacza promień koła generującego, d – odległość punktu kreślącego od środka koła, t – kąt, o jaki obróciło się koło od położenia początkowego.

Podobne równania parametryczne można wyprowadzić dla epicykloid i hipocykloid. Jeżeli umówić się, że dla epicykloid długość promienia r koła generującego ma znak dodatni, a dla hipocykloid ujemny, można równania obu rodzin zapisać razem w postaci:

$$x = (R+r) \cos \frac{r}{R}t - r \cos\left(t + \frac{r}{R}t\right),$$

$$y = (R+r) \sin \frac{r}{R}t - r \sin\left(t + \frac{r}{R}t\right),$$

gdzie R oznacza długość promienia koła stałego, a pozostałe oznaczenia są takie jak dla cykloid.

Dzięki temu, że wielu najwybitniejszych matematyków trudziło się badaniem poszczególnych własności cykloidy, zostały odkryte metody, które dzisiaj pozwalają bez większego wysiłku badać zarówno cykloide, jak i krzywe bardziej skomplikowane, o ile tylko dysponujemy ich równaniami. Ponieważ cykloida jest granicą ciągu epicykloid i hipocykloid przy promieniu koła stałego dążącym do nieskończoności, więc własności tych krzywych są uogólnieniem własności cykloidy. Dla przykładu: Pole obszaru ograniczonego gałęzią epicykloidy (hipocykloidy) i kołem stałym wynosi $\pi r^2 \left(3 + 2 \frac{r}{R}\right)$.

Normalna i styczna do epicykloidy (hipocykloidy) przechodzi odpowiednio przez punkt styczności koła generującego z kołem stałym i przez przeciwległy temu punktowi koniec średnicy koła generującego.

Długość gałęzi epicykloidy (hipocykloidy) wynosi $8r \left(1 + \frac{r}{R}\right)$.

Ewoluta epicykloidy (hipocykloidy) jest epicykloidą (hipocykloidą) podobną, ze współczynnikiem podobieństwa $\frac{1}{1 + 2 \frac{r}{R}}$.

Program komputerowy do kreślenia cykloid

Mając równania parametryczne krzywych cykloidalnych łatwo napisać program dla komputera, który będzie rysował wykresy tych krzywych. Szkic takiego programu w języku Basic może wyglądać następująco:

```
10 INPUT r1'r2'd'k'
20 CIRCLE 128,87,r1
25 CIRCLE r1+r2+128,87,r2
30 LET m=r2/r1: LET t=0
40 LET a=(1+m)*r1: LET b=m*t
45 LET c=b+t
50 LET x=a*COsb-d+COsc+128
60 LET y=a*SINb-d+SINc+87
70 PLOT x,y: LET t=t+k
80 GOTO 40
```

Parametr k reguluje szybkość kreślenia, a jednocześnie zagęszczenie punktów składających się na wykres (można przyjąć np. $k = 0,05$), $r1$ jest długością promienia koła stałego, a $r2$ koła generującego (dla hipocykloid $r2 < 0$), d jest odległością punktu kreślącego od środka koła generującego. Program można zatrzymać w dowolnej chwili instrukcją BREAK SPACE. Za pomocą instrukcji BREAK SPACE i GOTO można uzyskać kilka wykresów na jednym ekranie.

O krzywych cykloidalnych można by jeszcze pisać bardzo dużo. Zainteresowanych odsyłamy do następujących pozycji:

Historia matematyki, 3 tomy pod redakcją A.P. Juszkiewicza, PWN, Warszawa 1976.

Poradnik matematyczny, pod redakcją I. Dziubińskiego, T. Świątkowskiego, PWN, Warszawa 1982.

Matematyka. Poradnik inżyniera, 2 tomy, WNT, Warszawa 1986.

R. Courant, H. Robbins, *Co to jest matematyka*, PWN, Warszawa 1962.

H. M. Cundy, A. P. Rollet, *Modele matematyczne*, PWN, Warszawa 1967.

A. R. Hall, *Rewolucja naukowa 1500-1800*, PAX, Warszawa 1966.

R. Hooke, D. Shaffer, *Modele matematyczne a rzeczywistość*, PWN, Warszawa 1966.

M. Kline, *Matematyka a świat fizyczny*, PWN, Warszawa 1964.

E. Niczyporowicz, *Krzywe płaskie. Wybrane zagadnienia z geometrii analitycznej i różniczkowej*, PWN, Warszawa 1991.

Mierzmy wielkość U_0 , a nie siłę elektromotoryczną baterii, tak że ewentualny spadek napięcia na oporze wewnętrznym baterii nie ma znaczenia dla dalszych rozważań. Otwarcie klucza 1 (przerwanie paska) oznacza, że kondensator zaczyna się rozładowywać przez opornik i napięcie na nim spada; otwarcie klucza 2 zatrzymuje rozładowanie kondensatora, tak że napięcie jest dalej stałe (o ile pominiemy wpływ ładunku przez woltomierz). Oznaczmy tę końcową wartość napięcia jako U . Jak wiadomo, rozładowanie kondensatora przez opornik przebiega według wzoru

$$U = U_0 e^{-t/RC},$$

skąd

$$t = RC \ln \frac{U_0}{U}.$$

Mając czas t oraz odległość między paskami l możemy bez trudu obliczyć prędkość pocisku

$$v = \frac{l}{t} = \frac{l}{RC \ln(U_0/U)}.$$

Aby właściwie wybrać wartości R i C , założmy, że prędkość v jest rzędu 1000 m/s, a $l \approx 1$ m, czyli $t \approx 1$ ms. Nietrudno dojść do wniosku, że pomiar czasu będzie dokładny tylko wtedy, gdy iloczyn RC nie jest ani znacznie większy od t (wtedy bowiem kondensator prawie wcale nie rozładowałby się w ciągu tego czasu), ani znacznie mniejszy od t (wtedy rozładowałby się praktycznie do zera; w obu przypadkach obliczona wartość $\ln(U_0/U)$ mogłaby być obciążona dużym błędem). Przyjmijmy więc, że $RC \approx 1$ ms. Ponadto trzeba założyć, że w ciągu czasu potrzebnego na odczytanie napięcia U (około 1 s) spadek napięcia wynikający z rozładowania kondensatora przez woltomierz jest pomijalnie mały, czyli

$$R_{wolt} C \gg 1 \text{ s}.$$

Tak więc dla $R_{wolt} = 100 \text{ k}\Omega$ możemy wziąć C równe $10^{-4} \div 10^{-3} \text{ F}$, tzn. $100 \div 1000 \mu\text{F}$ i odpowiednio do tego $R \approx 1 \div 10 \Omega$.

116. Przyjmijmy, że kierunek biegu fali pokrywa się z osią z , a pole elektryczne leży w płaszczyźnie xy . Polaroid przepuszcza tę składową fali, której pole elektryczne ma kierunek jego osi, a pochłania składową o prostopadłym kierunku pola. Jeśli więc oś polaroidu tworzy kąt α z osią x , to rzut pola na nią wynosi

$$E' = E_x \cos \alpha + E_y \sin \alpha,$$

a rozkładając E' na składowe mamy pole fali przepuszczonej

$$E'_x = E_x \cos^2 \alpha + E_y \cos \alpha \sin \alpha,$$

$$E'_y = E_x \cos \alpha \sin \alpha + E_y \sin^2 \alpha.$$

Podstawiając $E_x = A \cos \omega t$, $E_y = 0$, $\alpha = \Omega t$ otrzymujemy

$$E'_x = \frac{A}{2} \cos \omega t + \frac{A}{4} (\cos(\omega + 2\Omega)t + \cos(\omega - 2\Omega)t),$$

$$E'_y = \frac{A}{4} (\sin(\omega + 2\Omega)t - \sin(\omega - 2\Omega)t).$$

Fala przepuszczona zawiera zatem: 1) składową wejściową o amplitudzie $\frac{A}{2}$, 2) składową obracającą się zgodnie z polaroidem o amplitudzie $\frac{A}{4}$ i częstości $\omega + 2\Omega$, 3) składową obracającą się przeciwnie do polaroidu o amplitudzie $\frac{A}{4}$ i częstości $\omega - 2\Omega$.

