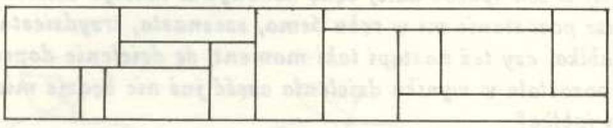
A jednak elementarnie ...

W *Delcie* 9/1991 w niezależnym dodatku *EPSILON* zostało rozwiązane nieelementarnie (za pomocą całek podwójnych z funkcji zespolonej!) następujące zadanie.

Prostokąt P dzielimy na skończoną liczbę mniejszych prostokątów (w ten sposób, że dowolne dwa z nich mogą zahaczać o siebie jedynie bokami – porównaj z rysunkiem). Załóżmy, że każdy z mniejszych prostokątów ma przynajmniej jeden bok o długości będącej liczbą całkowitą. Udowodnić, że prostokąt P ma bok o długości będącej liczbą całkowitą.



Redakcja *EPSILONA* zaznaczyła, że nie zna elementarnego rozwiązania. Co więcej, zadanie to było dyskutowane na pewnej międzynarodowej konferencji i tam też nikt nie znalazł elementarnego rozwiązania. Natomiast pan Marcin Mazur zwrócił nam uwagę, że elementarne rozwiązanie tego zadania znajduje się w zbiorku Зарубежные математические олимпиады (wyd. Moskwa 1987) – zadanie 16.25.

Poniżej przytaczamy szkic tego rozwiązania. Wyobraźmy sobie, że płaszczyzna jest nieskończoną szachownicą (pomalowaną na czarno-biało w standardowy sposób), przy czym kwadraciki, z których zbudowana jest ta szachownica, mają krawędzie długości 1/2. Jeżeli teraz weźmiemy dowolny prostokąt o krawędziach równoległych do linii szachownicy, mający jeden bok o długości całkowitej, to, jak łatwo zauważyć, powierzchnia jego białej części będzie równa powierzchni jego części czarnej (dlaczego?). Jeżeli natomiast weźmiemy dowolny prostokąt o krawędziach równoległych do linii szachownicy, mający jeden z wierzchołków wspólny z wierzchołkiem jakiegoś kwadracika i jeżeli wiemy, że powierzchnia jego białej części jest taka sama jak powierzchnia jego części czarnej, to stąd już wynika, że jeden z boków ma długość całkowitą. Jeżeli bowiem żaden z boków nie ma długości całkowitej, to odcinając odpowiednie prostokąty, których co najmniej jeden z boków ma długość całkowitą (dla nich część biała ma takie samo pole jak część czarna), dojdziemy do takiej sytuacji, że zostanie nam malutki prostokącik o obydwu bokach długości mniejszej niż 1, który ma jeden wierzchołek wspólny z wierzchołkiem kwadracika na szachownicy. Łatwo zauważyć, że pola białej i czarnej części tego prostokącika muszą być różne (dlaczego?). Teraz już możemy dokończyć nasze zadanie. Przypuśćmy, że prostokąt P jest sumą prostokątów $P_1, P_2, \ldots, P_n$ – tak jak w zadaniu. Usytuujmy naszą szachownicę tak, aby krawędzie tych prostokątów były równoległe do linii szachownicy i aby jeden z wierzchołków prostokąta P pokrywał się z wierzchołkiem kwadracika szachownicy. Wówczas, zgodnie z tym, co już udowodniliśmy, części białe i czarne prostokątów P_1, $P_2, \ldots, P_n$ mają równe powierzchnie. Wobec tego ta własność przysługuje też prostokątowi P, a stąd jedna z jego krawędzi ma długość całkowitą.

Zauważmy, że powyższy dowód uogólnia się na przypadek trójwymiarowy, gdzie prostokąty zastępujemy prostopadłościanami (proszę sformułować i udowodnić odpowiednie twierdzenie).

Piotr HAJŁASZ

Na orbicie eliptycznej deformacja obłoku będzie kombinacją opisanych tu efektów.

W tym miejscu Czytelnik wie już wystarczająco dużo, aby zrozumieć, jak powstają przypływy na Ziemi i na innych ciałach niebieskich.

3. Przypływy na Ziemi.

Mechanizm przypływów oceanicznych na Ziemi jest skomplikowany, ponieważ Ziemia jest dość mocno związana swoim własnym polem grawitacyjnym (nie jest obłokiem swobodnie poruszających się obiektów), a ponadto skorupa ziemska jest ciałem stałym o dużej sztywności. Różne części Ziemi nie poruszają się więc niezależnie w polu grawitacyjnym Słońca. Przedstawione powyżej rozumowanie pozwala jednak na jakościowe zrozumienie tego procesu.

Będąc ciałem prawie sztywnym cała Ziemia jest przymuszana do ruchu po orbicie z tą samą prędkością. Jednakże, część Ziemi znajdująca się bliżej Słońca, gdyby mogła, poruszałaby się szybciej niż środek Ziemi (z drugiego prawa Keplera) – porusza się więc z prędkością mniejszą od jej właściwej prędkości orbitalnej. Powoduje to nadwyżkę siły ciążenia nad siłą odśrodkową – na tę część Ziemi działa siła odciągająca ją ku Słońcu, od środka Ziemi. Część Ziemi znajdująca się dalej od Słońca, gdyby mogła, poruszałaby się po orbicie wolniej niż środek Ziemi, jest więc przymuszana do ruchu „zbyt szybkiego”. To z kolei wywołuje nadwyżkę siły odśrodkowej nad siłą ciążenia – na tę część Ziemi działa więc siła odciągająca ją od Słońca, znów od środka Ziemi.

Jedyną częścią powierzchni Ziemi, która może w widoczny sposób poddać się tym siłom, są masy wody w oceanach. Wznoszą się one ku Słońcu i w dal od Słońca, wysokość wzniesienia jest ograniczana polem grawitacyjnym Ziemi. Gdyby Ziemia obracała się synchronicznie, zwrócona stale tą samą stroną ku Słońcu, owe dwa wzniesienia na powierzchni oceanów stałyby nieruchomo stale w tych samych miejscach. Ponieważ Ziemia obraca się niesynchronicznie, wzniesienia przypływów, znajdujące się zawsze na linii łączącej środki Słońca i Ziemi, wędrują po powierzchni Ziemi powodując obserwowalne efekty na wybrzeżach.

Dla uproszczenia mówiliśmy tu o przypływach spowodowanych przez Słońce. W rzeczywistości na Ziemię działa także przyciąganie grawitacyjne Księżyca. Ponieważ Księżyc jest znacznie bliżej, niejednorodność jego pola grawitacyjnego