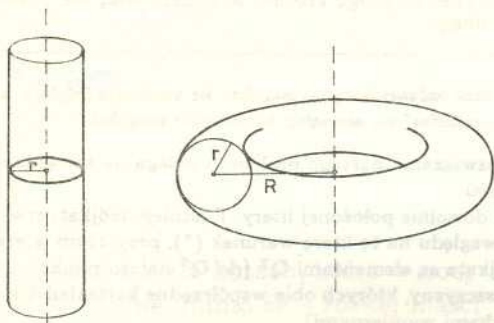


Zacznijmy od pytania: czy torusów jest więcej niż walców?

Uściślijmy: przez walec będziemy rozumieli powierzchnię powstałą przez obracanie prostej względem ustalonej prostej równoległej do niej; przez torus – powierzchnię powstałą przez obracanie okręgu względem ustalonej prostej leżącej w tej samej co on płaszczyźnie i rozłącznej z nim.



Rys. 1

Wówczas odpowiedź na pytanie będzie brzmiała: *tylko samo*, bo, jak łatwo zauważyć, i walców, i torusów jest nieskończenie wiele. Jeśli jednak zmodyfikujemy pytanie i będzie ono brzmiało: czy *różnych torusów jest więcej niż różnych walców?*, to odpowiedź może być inna. Zależy to od jasnego określenia, jakie walce czy jakie torusy uważamy za różne. W geometrii euklidesowej za *takie same* uważa się figury podobne – mają one bowiem takie same własności geometryczne. Nie ma takiej własności geometrycznej, która przysługiwałaby jednemu kwadratowi (czy trójkątowi równobocznemu), a nie przysługiwałaby innemu.

Każdy powie: to nieprawda, mogą się różnić wielkością. Jest to jednak tylko konsekwencja faktu, że w szkole uczymy się nie geometrii euklidesowej, lecz geometrii metrycznej (wbrew powszechnemu przekonaniu).

Z euklidesowego punktu widzenia odpowiedź na zmodyfikowane pytanie będzie następująca: *różnych torusów jest więcej niż różnych walców*. Walce bowiem są wszystkie figurami podobnymi, czyli „różnych walców” jest jedna sztuka. Różnych torusów natomiast jest nadal nieskończenie wiele – te, dla których stosunki $\frac{r}{R}$ (patrz rysunek 1) są różne, nie są figurami podobnymi.

Proste stwierdzenie, że czegoś jest nieskończenie wiele, na ogół matematyków nie zadowala. Tam, gdzie jest mowa o nieskończoności, mogą się dziać różne rzeczy (np. można dowieść, że punktów odcinka jest tyle samo co punktów płaszczyzny) i dlatego, gdy czegoś jest nieskończenie wiele, pytamy: *jak?* rozumiejąc przez to nie tylko postulat określenia rodzaju nieskończoności, lecz także postulat określenia jakiejś czytelnej struktury owego nieskończonego zbioru.

Zanim odpowiemy na tak rozumiane tytułowe pytanie, poniekąd zmienimy temat. Otóż w wielu działach matematyki (np. geometria riemannowska, geometria algebraiczna) przez torus rozumie się coś innego niż określiliśmy na początku. Żeby wyjaśnić powód zmiany pojęcia torusa, przyjrzyjmy się wadom zwykłego torusa, o którym mówiliśmy dotąd. Walec (który znalazł się w tym artykule, by świecić dobrym przykładem) jest

jednorodny metrycznie, co oznacza, że można go bez rozciągania (czy ściągania) przesuwać i przekręcać po nim samym tak, by dowolnie wskazany punkt można było nałożyć na dowolnie wskazany inny. Zwyczajny torus nie ma tej własności. Można go co prawda przekręcać po nim samym, ale tylko „w jedną stronę”. Nie można jednak (bez rozciągania i ściągania) przekręcić go np. tak, aby jakiś punkt leżący najbliżej osi obrotu znalazł się od tej osi najdalej. Ponieważ matematycy wysoce cenią jednorodność, więc wymyślili inne pojęcie torusa. Takie, by ten nowy torus (nazwijmy go torusem abstrakcyjnym) był metrycznie jednorodny. Aby jego określenie sprawiło mniej trudności, zacznijmy od innej definicji walca.

Walec (zwyczajny) po rozcięciu wzdłuż tworzącej (prostej równoległej do osi) stanie się pasem płaszczyzny.

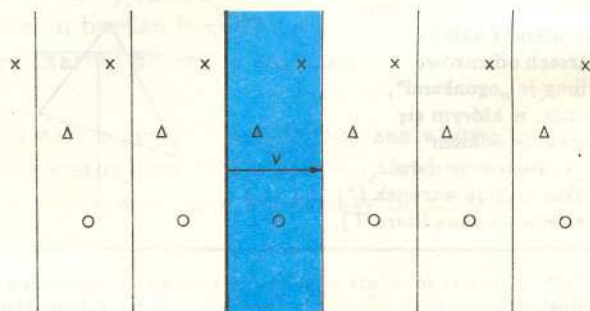
Oczywiście, rozcięty walec trzeba rozciąć, zanim będzie pasem płaszczyzny. Operacja ta jednak nie zmienia żadnej z odległości na powierzchni (nie w przestrzeni, lecz na powierzchni). Tego rodzaju operacje (tj. nie zmieniające odległości na powierzchni) tu i dalej uznajemy za dopuszczalne.

Można go więc traktować jak pas skleiony brzegami. Można jednak na walec spojrzeć jeszcze inaczej: jest to (cała) płaszczyzna zwinięta w rurkę. Od mniej więcej stu lat operacja „zwijania w rurkę” została zmatematyzowana w następujący sposób.

Wybermy (na płaszczyźnie) jakiś wektor v , czyli jakieś przesunięcie, i rozważmy wszystkie przekształcenia, jakie można uzyskać przez składanie takich przesunięć i przesunięć do nich odwrotnych. Otrzymamy w ten sposób grupę przekształceń nazywaną C_∞ . Składa się ona z przesunięć o wektory kv , gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Jeśli w jakimś zbiorze (tu: na płaszczyźnie) działa jakaś grupa G (tu: C_∞), to wszystkie elementy tego zbioru są podzielone na rozłączne klasy zwane orbitami: wraz z punktem P orbitę tworzą te wszystkie punkty, które są obrazami P przy zastosowaniu któregoś z przekształceń grupy G . (Czytelnik może sam sprawdzić, że orbity są rzeczywiście rozłączne.)

Grupa przekształceń to taki niepusty zbiór przekształceń, w którym wraz z każdym przekształceniem jest przekształcenie do niego odwrotne, a wraz z każdymi dwoma – ich złożenie.

Jeśli narysujemy na płaszczyźnie pas o brzegach prostopadłych do v i o szerokości $|v|$, przy czym jeden z brzegów zaliczymy do pasa, a drugi nie, to w pasie tym każda orbita będzie reprezentowana przez dokładnie jeden punkt.



Rys. 2. Jednakowymi znaczkami oznaczone są punkty należące do tej samej orbity.

Potraktujmy teraz każdą orbitę jako punkt nowej (abstrakcyjnej) przestrzeni. Przestrzenią tą okaże się walec. Żeby to sobie uzmysłowić (i wyobrazić sobie, jak z orbity może stać się jeden punkt), przedstawmy sobie płaszczyznę jak cienką, całkowicie przezroczystą folię i zwińmy ją tak, by punkty z jednej orbity nałożyły się, byśmy widzieli je w tym samym miejscu – rzeczywiście mamy walec.

Opisaną tu operację przejścia od jakiejś przestrzeni Π do przestrzeni orbit grupy G tej przestrzeni nazywa się często dzieleniem przez grupę, a otrzymaną przestrzeń orbit nazywa się ilorazową i oznacza Π/G .

Podejście takie dobrze demonstruje fakt, że otrzymany walec lokalnie dziedziczy własności metryczne płaszczyzny, z której powstał. Ponieważ ona była jednorodna, więc jednorodny jest i on.

Uzyskane tu dziedziczenie własności metrycznych wymaga, by grupa, przez którą dzielimy, składała się z izometrii i była jednostajnie nieciągła, co oznacza, że każdy punkt w każdej z izometrii grupy odsuwa się co najmniej o z góry zadaną odległość. Grupa obrotów o $k \cdot 90^\circ$ względem danego punktu jest przykładem grupy, która nie jest jednostajnie nieciągła, nawet gdy wyłączymy środek obrotu.

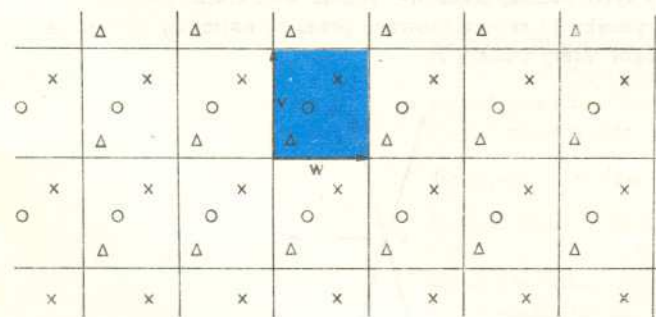
Spróbujemy teraz uzyskać w analogiczny sposób torus abstrakcyjny, czyli coś bardzo podobnego do zwyczajnego torusa, ale coś, co jest metrycznie jednorodne.

Tym razem na płaszczyźnie bierzemy pod uwagę dwa nierównoległe wektory v i w . I znów znajdujemy najmniejszą grupę, w której są przesunięcia o te wektory. Grupa ta nazywa się p_1 i składa się z przesunięć o wektory $kv + lw$, gdzie k i l są dowolnymi liczbami całkowitymi.

Stosowniejszą nazwą tej grupy byłoby $C_\infty \times C_\infty$. Nazwa p_1 przyjęła się dlatego, że tak oznaczono tę grupę w *International Tables for X-ray Crystallography*. Tego rodzaju grupy mają bowiem konkretne i ważne zastosowania w fizyce ciała stałego.

Jeśli przejdziemy teraz do przestrzeni orbit grupy p_1 na płaszczyźnie, to otrzymamy abstrakcyjny torus.

Powstaje pytanie, dlaczego takie coś uparto się nazywać torusem. Wyjaśnienie można uzyskać posługując się użytym już przedstawieniem płaszczyzny jako przezroczystej folii. Teraz rysujemy na niej równoległobok, którego boki są, odpowiednio, wektorami v i w . Zapomnijmy na chwilę o wektorze w i zwińmy folię zgodnie z działaniem grupy C_∞ wyznaczonej przez wektor v – otrzymamy walec. Pewne punkty orbity każdego punktu nakryją się, a pewne nie.



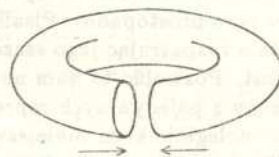
Rys. 3. Po zwińnięciu płaszczyzny w walec utożsamione punkty orbity grupy p_1 układają się w orbitę grupy C_∞ .

Można zauważyć, że aby nakryć wszystkie punkty orbity, trzeba teraz zwinąć walec zgodnie z działaniem grupy C_∞ wyznaczonej przez wektor w . Tego już fizycznie zrobić się nie da – walec jest sztywny.

Sztywność walca wynika z pięknego *theorem egregium* udowodnionego przez Gaussa, ale to już zupełnie inna historia.

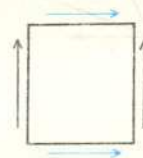
Mysłowo można jednak ten eksperyment wykonać: zwijamy walec rozciągając go „z jednej strony” i wyobrażając sobie, że tego nie robimy.

Od razu widać, że jednym ze sposobów zwińnięcia jest „wał” polykający swój ogon” – niewątpliwie powstaje w ten sposób torus.



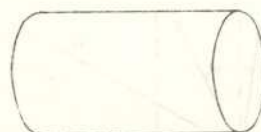
Rys. 4. Oczywiście, zwijanie walca tak nie wygląda, bo ma on nieskończoną długość.

Nie jest to jednak zwykły torus, bo odległości na nim nie są takie, jakie wytworzyły się w wyniku rozciągania folii, lecz takie, jakie były jeszcze przed zwijaniem – można sobie więc wyobrażać torus abstrakcyjny jak zwykły torus, na którym odległość mierzy się inaczej. Mierzy się tak, by długość okręgu punktów najbliższych osi obrotu była taka sama, jak długość okręgu punktów najdalszych od osi. Innymi słowy, tak jak walec to sklejonny brzegami pas, tak torus to równoległobok o sklejonych przeciwległych bokach.



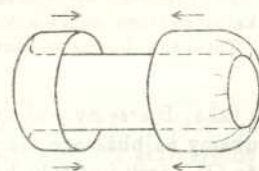
Rys. 5

Zauważmy też, że abstrakcyjny torus lokalnie zachowuje się jak walec – taka jest konsekwencja przyjętego założenia o sposobie mierzenia na nim odległości.



Rys. 6. Tak wygląda kawałek metrycznie jednorodnego torusa. W całości nie można go narysować, bo metrycznie jednorodny torus nie mieści się w przestrzeni euklidesowej.

Naprawdę istotną różnicę między torusem zwyczajnym i abstrakcyjnym dostrzeżemy zwińając walec w inny sposób – można go zwinąć jak obracaną na lewą stronę skarpetkę.



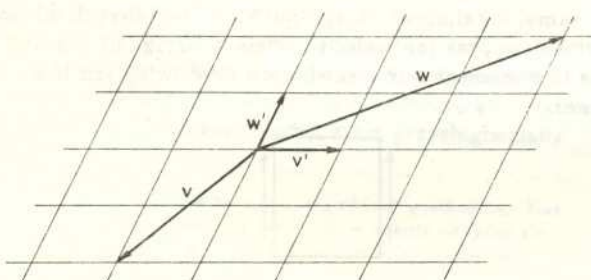
Rys. 7

I wtedy okaże się, że nie można stwierdzić, który z wektorów v i w odpowiada „grubości” dętki (jaka jest torus na rysunku 1), a który „promieniowi” dętki. Na rysunku 4 „grubości” odpowiadał wektor v , a na rysunku 7 – wektor w .

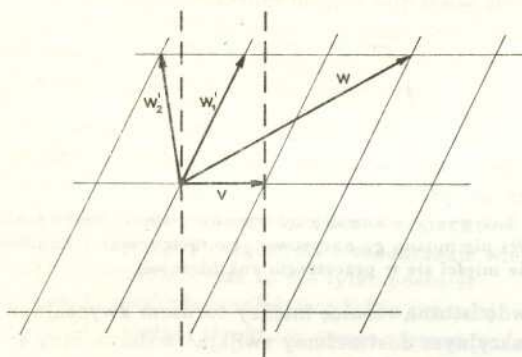
Teraz możemy przystąpić do uogólnionego pytania o to, jak wiele jest różnych abstrakcyjnych torusów. Czyli do pytania o to, na ile nie podobnych siatek równoległoboków można rozbić płaszczyznę. A nawet więcej – jaka jest struktura zbioru takich, różnych w podanym wyżej sensie, siatek.

Pierwsza uwaga dotyczy dotąd stosowanego (nielegalnie) uproszczenia. Rysowaliśmy mianowicie (rysunki 3 i 5) wektory v i w jako prostopadłe. Pisaliśmy o równoległoboku stale rozpatrując jego szczególny przypadek – prostokąt. Pozwoliło to nam uniknąć sytuacji, w której obszar złożony z pojedynczych reprezentantów każdej orbity jest równoległobokiem mniejszym niż równoległobok rozpięty na wektorach v i w . Rysunki 8 i 9 pokazują takie sytuacje (które dla wektorów prostopadłych zdarzyć się nie mogą). W każdej jednak takiej sytuacji można wektory v i w zastąpić innymi, v' i w' , które odpowiadają bokom równoległoboku powstałej siatki.

Za użytym słowem można kryje się spory kawałek matematyki związany z pojęciem grupy unimodularnej i teorią liczb (nie jest to dziwne – wyraźnie widać przecież w grupie pl liczby całkowite).



Rys. 8. Siatka wyznaczona przez wektory v i w jest identyczna z siatką wyznaczoną przez wektory v' i w' . Dowód tego faktu warto zacząć od spostrzeżenia, że $v' = -2v - w$, $w' = 3v + 2w$.

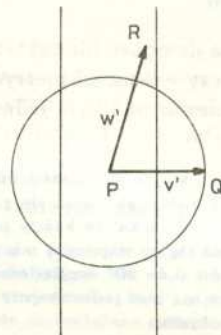


Rys. 9. Dla danej siatki i danego wektora v , krótszego niż w , zawsze można dobrać taki wektor w' , by otrzymać tę samą siatkę i by rzut prostokątny wektora w' na wektor v był nie dłuższy niż połowa $|v|$. Tutaj taki będzie wektor $w - 3v$ lub $w - 2v$.

Droga do tego będzie taka. Bierzemy pod uwagę jakiś (jeden) punkt P i szukamy najbliższego mu punktu jego orbity (niech będzie to Q) – jeśli jest takich kilka (a zawsze są co najmniej dwa), bierzemy dowolny z nich. Jako v' przyjmujemy wektor \overrightarrow{PQ} .

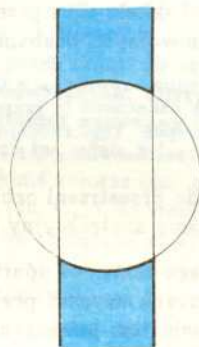
Ponieważ pracujemy z dokładnością do podobieństwa, więc możemy założyć, że dla każdej siatki otrzymaliśmy ten sam wektor v' . Do niego dobierzemy teraz wektor w' .

Z przyjrzenia się rysunkowi 9 wynika, że zawsze może nim być wektor \overrightarrow{PR} , gdzie R leży w pasie o szerokości $|v'|$, o brzegach prostopadłych do v' , dla którego P leży na środkowej. Co więcej, z minimalności PQ wynika, że R nie leży we wnętrzu koła o promieniu $|v'|$ i środku P .



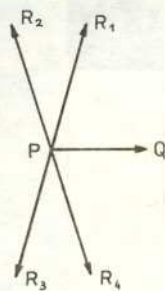
Rys. 10

W ten sposób uzyskaliśmy pewną reprezentację torusów abstrakcyjnych – jest to figura złożona z punktów R otrzymanych dla różnych siatek, a więc pas bez brzegów z wyciętym wnętrzem koła.



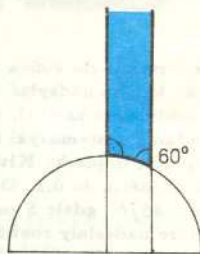
Rys. 11

Jest to reprezentacja dobra, ale nie jednoznaczna. Rysunek 12 dobitnie wskazuje, że punkty R_i położone symetrycznie względem prostej PQ , względem środkowej pasa i względem punktu P dadzą nam siatki takie same, a tylko inaczej położone. Każda więc siatka jest na rysunku 11 reprezentowana przez co najmniej dwa, a na ogół cztery punkty R .



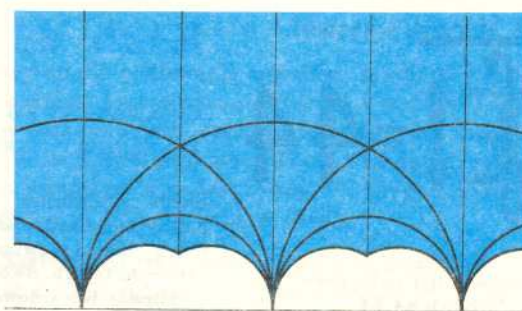
Rys. 12. Aby przekonać się, że siatki wyznaczone przez wektory \overrightarrow{PQ} i \overrightarrow{PR}_i są takie same, należy je narysować. Okaże się, że dla $i = 1, 3$ otrzymamy tę samą siatkę, a dla $i = 2, 4$ siatkę symetryczną względem prostej PQ .

Usunięcie tej wady prowadzi do figury z rysunku 13, który nazywany jest geometryczną interpretacją przestrzeni torusów (abstrakcyjnych).



Rys. 13. To, że zaznaczone kąty rzeczywiście mają taką rozwartość, Czytelnik obliczy bez trudu (kąta między krzywymi to kąt między stycznymi do nich).

W konstruowaniu tej interpretacji była pewna dowolność. Każdy z Czytelników może wybrać inną drogę poszukiwania geometrycznej interpretacji przestrzeni torusów. Jeśli jednak zdecyduje się, by interpretacja ta była obszarem (ew. z pewnymi fragmentami brzegu), to otrzyma jedną z figur widocznych na rysunku 14 w części zabarwionej (lub jeszcze inne figury mieszczące się w nie zabarwionej części półpłaszczyzny). Wzajemna zależność między tymi obszarami upewnia matematyków, że geometryczna interpretacja przestrzeni torusów naprawdę mówi coś o torusach – obszary te można otrzymać z dowolnego z nich za pomocą symetrii osiowych względem tych fragmentów brzegu, które są półprostymi lub odcinkami, i inwersji względem tych fragmentów brzegu, które są łukami okręgów. Obszary te są więc w zdrowy, geometryczny sposób równoważne.



Rys. 14. Wszystkie kąty obszarów są równe 90° , 60° lub 0° (styczność).

Inwersja względem okręgu o środku O i promieniu r to przekształcenie, które każdemu punktowi $X \neq O$ przyporządkowuje taki punkt X' , że $\overrightarrow{OX'} \cdot \overrightarrow{OX} = r^2$ oraz $OX \parallel OX'$. Inwersja zachowuje kąty między krzywymi oraz przeprowadza proste i okręgi na proste i okręgi.

Dalsze badania przestrzeni torusów polegają na takim zmetryzowaniu półpłaszczyzny, w której mieszczą się reprezentujące tę przestrzeń figury, by opisane wyżej przekształcenia były izometriami. Odpowiednim sposobem mierzenia odległości okazuje się metryka zamieniająca półpłaszczyznę na płaszczyznę Bolyai-Łobaczewskiego. Ostatecznie przestrzeń torusów okazuje się być trójkątem prostokątnym niewłaściwym o kącie 60° na płaszczyźnie Bolyai-Łobaczewskiego, o czym warto może bardziej szczegółowo napisać przy innej okazji.

W artykule zakłada się milcząco, że jedyny sposób uczynienia torusa jednorodnym metrycznie to nadanie mu metryzacji lokalnie identycznej z płaszczyzną euklidesową. Nie jest to założenie arbitralne – dowodzi tego, że tak jest, twierdzenie Gaussa-Bonneta.



Zadania

Redaguje Michał WOJCIECHOWSKI

M 619. W węzłach figury z rysunku 1 (sześciokąt foremny rozbity na 24 trójkąty) wpisano parami różne liczby. Udowodnić, że znajdzie się co najmniej 7 takich trójkątów, iż liczby zapisane w ich wierzchołkach rosną w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Rozwiązanie na str. 7

M 620. Czy można siatkę przedstawioną na rysunku 2 (każda krawędź ma długość 1) przedstawić jako sumę pięciu łamanych długości 8?

Rozwiązanie na str. 7

M 621. W n -kącie foremnym należy każdy bok i każdą przekątną pomalować pewnym kolorem tak, by żadne dwa spośród tych odcinków mające punkt wspólny, nie były pomalowane tym samym kolorem. Ilu co najmniej kolorów należy użyć?

Rozwiązanie na str. 7

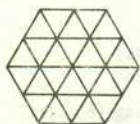
Redaguje Jarosław KULPA

F 325. Oszacuj czas zderzenia piłki futbolowej z betonową ścianą. Dane dotyczące piłki: masa $m = 0,6$ kg, promień piłki $r = 11$ cm, różnica ciśnień między ciśnieniem wewnątrz piłki a ciśnieniem atmosferycznym $p = 0,9$ atm (90 kPa).

Rozwiązanie na str. 16

F 326. Serce ludzkie przepompowuje $q = 5$ litrów krwi na minutę oraz wytwarza nadciśnienie $p \approx 100$ mmHg (13 kPa). Na ile dni pracy sztucznego serca o identycznych parametrach i sprawności $\eta = 50\%$ starczyłoby energii ze standardowego akumulatora samochodowego ($Q = 48$ A·h, $U = 12$ V)?

Rozwiązanie na str. 16



Rys. 1



Rys. 2