Zadania z matematyki nr 235, 236

235. Okręgi k i k' są styczne zewnętrznie. W okrąg k wpisano trójkąt równoboczny ABC. Na okręgu k' tak obrano punkty A', B', C', że proste AA', BB', CC' są styczne do k'. Dowieść, że długość jednego z odcinków AA', BB', CC' równa się sumie długości pozostałych dwóch.

236. Dla każdej liczby naturalnej n wyznaczyć wszystkie funkcje f, określone na zbiorze $M = \{0, 1, \ldots, n\}$, o wartościach w tym samym zbiorze, spełniające następujący warunek: dla każdego $m \in M$ istnieje dokładnie $f(m)$ różnych liczb $k \in M$, takich że $f(k) = m$. [Równoważnie: $f(m) = |f^{-1}(\{m\})|$ dla $m \in M$, gdzie $|X|$ oznacza moc (liczbę elementów) zbioru X.]

Zadanie **236** zaproponował Czytelnik z Warszawy, pragnący zachować incognito.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1991

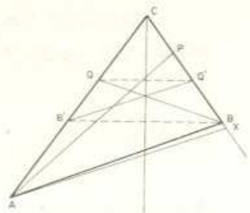
Przypominamy treść zadań:

227. Na bokach BC i AC trójkąta ABC tak obrano punkty P i Q, że $|\angle BAP| : |\angle BAC| = |\angle ABQ| : |\angle ABC|$. Dowieść, że jeśli $|AC| \geq |BC|$, to $|AP| \geq |BQ|$.

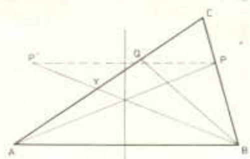
228. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $W(x)$ spełniające tożsamościowo równanie $(x-1)W(x+1) = (x+3)W(x-1)$.

227. Miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC oznaczmy odpowiednio przez α, β, γ. Zakładamy, że $|AC| \geq |BC|$; zatem $\alpha \leq \beta$. Zgodnie z założeniem, istnieje taka liczba $t \geq 0$, że $|\angle BAP| = t\alpha$ i $|\angle ABQ| = t\beta$.

Oznaczmy przez B' i Q' punkty symetryczne do B i Q względem dwusiecznej kąta BCA (rys. 1); przez P' oznaczmy punkt symetryczny do P względem symetralnej boku AB (rys. 2).



Rys. 1



Rys. 2

Niech X będzie takim punktem prostej BC, że $AX \parallel B'Q'$ i niech Y będzie punktem przecięcia odcinków AC i BP'. Zauważmy, że

$$|BQ| = |B'Q'| \leq |AX| \quad \text{oraz} \quad |AP| = |BP'| \geq |BY|.$$

Dla uzyskania tezy zadania wystarczy więc, by zachodziła jedna z nierówności:

$$(1) \qquad |AX| \leq |AP|; \quad \text{równoważnie:} \quad |\angle APX| \leq |\angle AXP|$$

lub

$$(2) \qquad |BY| \geq |BQ|; \quad \text{równoważnie:} \quad |\angle BQY| \geq |\angle BYQ|.$$

Mamy następujące równości kątów:

$$|\angle CAP| = (1-t)\alpha, \quad |\angle CAX| = |\angle CB'Q'| = |\angle CBQ| = (1-t)\beta \quad \text{(rys. 1)}$$

oraz

$$|\angle ABQ| = t\beta, \quad |\angle ABY| = |\angle BAP| = t\alpha \quad \text{(rys. 2)}.$$

Wynika z nich, że

$$|\angle CAP| \leq |\angle CBX| \quad \text{oraz} \quad |\angle ABQ| \geq |\angle ABY|.$$

Zatem punkt P leży na odcinku CX, a punkt Q leży na odcinku CY. Wobec tego

$$|\angle APX| = |\angle APB| = 180^\circ - |\angle ABC| - |\angle BAP| = 180^\circ - \beta - t\alpha,$$
$$|\angle AXP| = |\angle B'Q'C| = |\angle BQC| = |\angle BAQ| + |\angle ABQ| = \alpha + t\beta,$$
$$|\angle BQY| = |\angle BQA| = 180^\circ - |\angle CAB| - |\angle ABQ| = 180^\circ - \alpha - t\beta,$$
$$|\angle BYQ| = |\angle CAB| + |\angle ABY| = \alpha + t\alpha.$$

A zatem nierówności (1) i (2) są odpowiednio równoważne następującym nierównościom (1′) i (2′):

$$(1') \qquad 180^\circ - \beta - t\alpha \leq \alpha + t\beta, \quad \text{czyli} \quad t(\alpha+\beta) \geq \gamma,$$

$$(2') \qquad 180^\circ - \alpha - t\beta \geq \alpha + t\alpha, \quad \text{czyli} \quad t(\alpha+\beta) \leq \gamma + (\beta - \alpha).$$

Jedna z nich jest na pewno spełniona. Kończy to dowód.

228. Kładąc $x = 1$, a następnie $x = -3$, stwierdzamy, że $W(0) = 0$ i $W(-2) = 0$. Zatem na mocy twierdzenia Bézouta istnieje taki wielomian $V(x)$, że $W(x) = x(x+2)V(x)$. Wstawiamy to do wyjściowego równania i uzyskujemy związek $V(x+1) = V(x-1)$ (spełniony tożsamościowo). Stąd $V(x) = \text{const}$ i $W(x) = cx(x+2)$. Bez trudu sprawdzamy, że każdy wielomian tej postaci spełnia podane równanie.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 1992

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 221 (WT=3,38) i 222 (WT=1,35) z numeru 5/1991

Paweł Kubit	– Krosno	43,17
Krzysztof Zawisławski	– Warszawa	1–42,82
Józef Siwy	– Łaziska Grn.	1–40,89
Dariusz Rybacki	– Kraśnik	40,18
Tomasz Wietecha	– Tarnów	37,48
Jan Ciach	- Ostrowiec Św.	2-36,75
Leszek Krawczyk	– Włodawa	36,37
Mirosław Matlęga	– Skoczów	35,59
Andrzej Bonk	– Chełmża	3–33,92
Jerzy Mikuta	– Zielona Góra	2–33,87
Anna Gluza	– Toruń	1–32,96
Leszek Krzywonos	– Ornatowice	32,51
Piotr Kumor	– Olsztyn	2–29,66
Marek Prauza	– Poraj	2–29,18
Łukasz Wiechecki	– Legnica	28,96
Marek Karaś	– Tarnów	28,62
Krystyna Witek	– Ostrów Maz.	1–27,51
Ryszard Pagacz	– Zawadzkie	2–27,16
Andrzej Kondracki	– Białystok	26,60
Henryk Mikołajczak	– Wałbrzych	1–26,04
Janusz Olszewski	– Suwałki	25,73
Leszek Gasiński	– Stalowa Wola	24,35
Krzysztof Jedziniak	– Katowice	2–24,32
Henryk Kornacki	– Augustów	1–23,69
Tomasz Szymczyk	– Bielsko-Biała	1–23,06
Krzysztof Zapisek	– Warszawa	22,91
Wojciech Skut	– Warszawa	22,43
Jerzy Janowicz	– Bolesławiec	7–22,08
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	2–21,36
Adam Czornik	– Bytom	1–20,43

Legenda (przykładowo): stan konta 7 – 22,08 oznacza, że uczestnik już siedmiokrotnie zdobył **44** punkty, a w kolejnej (ósmej) rundzie ma 22,08 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
– przysłali rozwiązanie przynajmniej jednego zadania z rocznika 1989, 1990 lub 1991.

Zaprzestajemy więc drukowania nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście, jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):
J. Janowicz (7), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał (3), T. Rawlik (3), M. Mazur(3), A. Bonk (3), K. Serbin (3)
(cyfra w nawiasie wskazuje, ile razy uczestnik przekroczył barierę 44 punktów).

Pozostali członkowie **Klubu 44M** (alfabetycznie; nie powtarzamy nazwisk figurujących na liście powyżej):
Z. Bartold (2), T. Biegański (1), W. Boratyński (1), M. Czerniakowska (1), P. Figurny (1), M. Fiszer (1), P. Gadziński (1), Z. Galias (1), T. Grzesiak (1), K. Hryniewiecki (1), K. Jachacy (1), P. Jędrzejewicz (2), H. Kasprzak (2), T. Komorowski (2), Z. Koza (2), A. Krzysztofowicz (1), D. Kurpiel (2), A. Langer (1), R. Latała (1), J. Małopolski (2), J. Mańdziuk (1), M. Marczak (1), R. Mazurek (1), M. Mikucki (1), J. Milczarek (1), R. Mitraszewski (1), W. Olszewski (1), E. Orzechowski (2), K. Pióro (2), M. Roman (1), A. Ruszel (1), S. Solecki (2), Z. Surduka (1), A. Smolczyk (1), W. Szymczyk (1), K. Trautman (1), P. Wach (1), A. Wyrwa (1), M. Zając (1), G. Zakrzewski (2), Z. Zaus (1).

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 119 (WT=2,45) i 120 (WT=3,15) z numeru 5/1991

Adam Sikorski	– Lublin	34,68
Paweł Perkowski	– Szczecin	32,65
Andrzej Borowski	– Aleksandrów K.	17,33

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po 120 zadaniach

obejmuje uczestników spełniających jeden z poniższych warunków:
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania w latach 1989 – 1991 i mają co najmniej 20 punktów lub są członkami **Klubu 44F** (cyfra przed kreską oznacza, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty).
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania w roku 1991 i mają co najmniej 10 punktów.

Paweł Koczyński	– Warszawa	39,57
Wojciech Peisert	– Wrocław	35,32
Piotr Bała	– Toruń	3–35,27
Adam Sikorski	– Lublin	2–34,68
Paweł Perkowski	– Szczecin	1–32,65
Mariusz Bogacz	– Pińczów	28,86
Jacek Stelmach	– Zabrze	1–29,44
Marek Karaś	– Tarnów	29,30
Dzierżysław Lipniacki	– Lublin	3–25,46
Anna Gluza	– Toruń	1–24,35
Andrzej Bonk	– Chełmża	23,22
Bogusław Mikielewicz	– Brodnica	1–21,99
Andrzej Borowski	– Aleksandrów	1–17,33
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	12,08
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	10,03
Leszek Motyka	– Kraków	1– 2,00
Aleksander Surma	– Myszków	2– 1,53
Roman Musiał	– Katowice	1– 4,40
Wiesław Kacprzak	– Kraków	1– 2,47
Jerzy Lipkowski	– Elbląg	2– 1,50
Tomasz Wietecha	– Tarnów	1– 1,45
Przemysław Gworys	– Częstochowa	1– 1,13

Pozostali członkowie **Klubu 44F** w kolejności zdobycia tytułu (liczba w nawiasach oznacza wielokrotność przekroczenia 44 punktów:
Tomasz Rawlik (1), Robert Repucha (1), Piotr Wach (1), Leszek Szalast (1).

Rozwiązanie zadania F 327. Jeżeli do przewodu o długości l przyłożymy napięcie U, to elektron będzie poruszał się z przyspieszeniem $a = \frac{eU}{ml}$. Średnia prędkość unoszenia $v = \frac{1}{2}a\tau$, τ – czas między kolejnymi zderzeniami z atomami sieci; prąd $I = envS$, gdzie $n = \frac{dN_A}{\mu}$ – koncentracja wolnych elektronów, S – przekrój przewodnika, N_A – stała Avogadro. Porównując wyrażenie na I z prawem Ohma ($I = \frac{U}{R}$, $R = \rho\frac{l}{S}$) otrzymujemy zależność $\tau = \frac{2m}{e^2 n\rho}$. W rzeczywistości elektron porusza się z dużo większą prędkością termiczną $v_1 = \frac{s}{\tau}$, która nie ma preferowanego kierunku. Ponieważ $\frac{mv_1^2}{2} = \frac{3}{2}kT$, droga swobodna jest dana wzorem $s = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \cdot \frac{2m}{e^2 n\rho} = 63$ Å.

Stała sieci wynosi $a = \sqrt[3]{\frac{4}{n}} = 3,6$ Å, odległość między najbliższymi atomami zaś $x = \frac{\sqrt{2}}{2}a = 2,5$ Å. Ostatecznie otrzymujemy $\frac{s}{x} = 25$.

Zadania z fizyki nr 133, 134

Redaguje Jerzy B. BROJAN

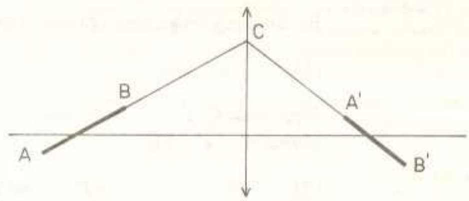
133. Po wewnętrznej stronie pionowego cylindra o promieniu R toczy się bez poślizgu kulka o promieniu $r < R$. Znaleźć zależność od czasu współrzędnej pionowej kulki oraz kąta obiegu w płaszczyźnie poziomej. (Patrz artykuł *Jak potoczy się wirująca kulka?*.)

134. Pocisk karabinowy o masie m lecący z prędkością v trafia w drewniany klocek o masie M i grubości d. Siła oporu działająca na pocisk w drewnie nie zależy od prędkości i jest równa T. Przy jakiej wartości v klocek uzyska maksymalną prędkość, jeśli początkowo był nieruchomy? Długość pocisku i siły zewnętrzne pominąć. Zadanie zostało oparte na projekcie p. Arkadiusza Kowalskiego z Lublina.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1991

Przypominamy treść zadań:

125. Przez soczewkę skupiającą przechodzą wiązki światła wybiegające z różnych punktów płaskiej powierzchni σ prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przecinającej się z nią wzdłuż linii AB.



Jaki powinien być kształt ekranu, aby wszystkie punkty powierzchni σ były zogniskowane na tym ekranie ostro? Jeśli przedmiotem jest prostokąt należący do σ, to jaki kształt będzie miał obraz tego prostokąta na ekranie?

126. Jednorodna kulka toczy się bez poślizgu po płaszczyźnie poziomej z prędkością v_0 w kierunku osi x, przy czym jej oś obrotu tworzy z pionem (osią y) kąt β. Kulka wtacza się na wznoszącą się powierzchnię o symetrii translacyjnej wzdłuż osi z. Jaką maksymalną wysokość osiągnie kulka? Przyjąć, że kulka nie odrywa się od podłoża i styka się z nim tylko w jednym punkcie.

125. Weźmy dwa dowolne punkty A i B, których obrazami w soczewce są A' i B' (pomijamy standardową konstrukcję A' i B' z wykorzystaniem promieni przechodzących przez ogniska). Ponieważ promień ABC należy zarówno do wiązki wychodzącej z A, jak i do wiązki wychodzącej z B, więc po załamaniu musi on przechodzić przez oba punkty A' i B', tzn. A', B' i C muszą leżeć na jednej prostej. Widać też, że obraz dowolnego punktu D należącego do odcinka AB musi leżeć na odcinku $A'B'$, a rozpatrując problem w trzech wymiarach dochodzimy do wniosku, że obrazem powierzchni σ jest płaska powierzchnia σ' prostopadła do rysunku i zawierająca A' i B'. Obrazem prostokąta będzie czworokąt.

126. Patrz artykuł *Jak potoczy się wirująca kulka?*

Jak potoczy się wirująca kulka?

Niewiele jest ściśle rozwiązywalnych problemów z zakresu mechaniki bryły sztywnej, które mają „istotnie trójwymiarowy" charakter, tzn. w których występują wszystkie trzy współrzędne wektora prędkości kątowej i momentu pędu. Jedno spojrzenie na układ nieliniowych równań dynamicznych Eulera (do których należy jeszcze dodać niemniej skomplikowane warunki kinematyczne) skutecznie odstrasza amatorów łatwych sukcesów. Dziwne jednak, że zbiory zadań i podręczniki (także akademickie) pomijają prostszy szczególny przypadek tego problemu – ruch ciała sferycznie symetrycznego, np. toczenie się kulki po „istotnie trójwymiarowym" torze. Uproszczenie wynika tu z symetrii momentu bezwładności, który może być uznany za wielkość skalarną, tak że moment pędu i prędkość kątowa są równoległe. Do tej klasy zagadnień należy zadanie 126 z ligi zadaniowej **Klubu 44 F** (patrz „Przypominamy treść zadań").

Wprowadźmy oznaczenia: m – masa kulki, r – jej promień, $\vec{r}$ – wektor poprowadzony od środka kulki do punktu styczności z podłożem, $\vec{\omega}$ – wektor prędkości kątowej, $\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}$ – prędkość środka kulki, $\vec{K} = I\vec{\omega} = \gamma m r^2 \vec{\omega}$ – wektor momentu pędu kulki względem środka (dla kulki jednorodnej $\gamma = \frac{2}{5}$, dla cienkiej kulki wydrążonej $\gamma = \frac{2}{3}$), $\vec{T}$ – siła tarcia statycznego, tzn. prostopadła do $\vec{r}$ składowa siły reakcji podłoża, $\vec{P}$ – prostopadła do $\vec{r}$ składowa siły ciężkości. Obowiązują równania:

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_{\perp} \tag{1}$$

– II zasada dynamiki zapisana dla rzutów na płaszczyznę prostopadłą do $\vec{r}$ (odpowiednie składowe przyspieszenia oznaczono $\vec{a}_{\perp}$),

$$\vec{r} \times \vec{T} = \frac{d\vec{K}}{dt} = \gamma m r^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{2}$$

– II zasada dynamiki ruchu obrotowego.

Obok układu xyz możemy wprowadzić lokalny układ współrzędnych prostokątnych ruz, gdzie oś r będzie skierowana wzdłuż $\vec{r}$, a oś u w płaszczyźnie zy prostopadle do $\vec{r}$. Różniczkując względem czasu równanie $\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}$ otrzymamy

$$\vec{a} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\omega} + \vec{r} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{3}$$

Drugi składnik jest – oczywiście – prostopadły do $\vec{r}$, natomiast w pierwszym składniku wektor $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ma kierunek osi u, zatem składowa z wektora $\vec{\omega}$ daje iloczyn wektorowy o kierunku $\vec{r}$, a składowa $\vec{\omega}_r$ daje iloczyn wektorowy o kierunku osi z. Stąd

$$\vec{a}_{\perp} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\omega}_r + \vec{r} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{4}$$

Pomnóżmy równanie (2) lewostronnie wektorowo przez $\vec{r}$.

$$\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{T}) = \gamma m r^2 \vec{r} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{5}$$

Ponieważ $\vec{r} \cdot \vec{T} = 0$, więc lewa strona jest równa $-\vec{T}r^2$. Po prawej podstawiamy kolejno równania (4) i (1)

$$-\vec{T} = \gamma m(\vec{a}_{\perp} - \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\omega}_r) = \gamma(\vec{P} + \vec{T}) - \gamma m \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\omega}_r. \tag{6}$$

Równanie to ma dwie składowe wzdłuż osi u i z, przy czym ostatni wyraz ma tylko składową z, a $\vec{P}$ – tylko składową u. Wynika stąd natychmiast

$$T_u = -\frac{\gamma}{1+\gamma} P \tag{7}$$

i z równania (1) mamy

$$m a_u = P + T_u = \frac{1}{1+\gamma} P = \frac{1}{1+\gamma} m g \sin\alpha, \tag{8}$$

gdzie α – lokalny kąt nachylenia pochylni. Widzimy, że ruch kulki w płaszczyźnie xy (tzn. w płaszczyźnie ru) jest całkowicie niezależny od skośnego kierunku osi obrotu kulki i związanego z nim ruchu w kierunku osi z. Korzystając z zasady zachowania energii (lub dalej przekształcając równanie (8)) znajdujemy odpowiedź

$$h = \frac{1+\gamma}{2g} v_0^2 \quad \left(\text{jeśli } \gamma = \frac{2}{5}, \text{ to } h = \frac{0,7}{g} v_0^2\right). \tag{9}$$

Kończy to część „ligową" rozwiązania, ale bynajmniej nie kończy się na tym lista pytań, na które można znaleźć odpowiedź w tym problemie. Okazuje się, że można również obliczyć składową prędkości v_z i składową prędkości kątowej ω_r w każdym punkcie pochylni. Weźmy w tym celu składową z równania (6) i zauważmy, że $\frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\alpha}{dt}\vec{i}_u$ (gdzie $\vec{i}_u$ – wersor osi u, α – lokalny kąt nachylenia). Zwrot osi u wybraliśmy tu w górę pochylni, a zwrot osi r – w dół, tak że układ ruz ma taką samą skrętność, jak układ xyz. Stąd

$$-(1+\gamma)T_z = +\gamma m r \frac{d\alpha}{dt} \omega_r. \tag{10}$$

Podstawiając $T_z = m a_z = m dv_z/dt$ mamy

$$-(1+\gamma) dv_z = \gamma r \omega_r d\alpha. \tag{11}$$

Z drugiej strony z równania (2) wynika, że $\vec{r} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$, czyli $r d\omega_r = d(r\omega_r) = d(\vec{r} \cdot \vec{\omega}) = \vec{\omega} \cdot d\vec{r} = \omega_u r d\alpha = v_z d\alpha$,

$$r d\omega_r = v_z d\alpha. \tag{12}$$

Całkując układ równań (11) i (12) otrzymujemy ostatecznie

$$\omega_r = \omega_r^{pocz} \cos(\lambda\alpha), \tag{13}$$

$$v_z = -r\omega_r^{pocz} \lambda \sin(\lambda\alpha), \quad \text{gdzie } \lambda = \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}}, \tag{14}$$

przy czym ω_r^{pocz} wyraża się przez dany w zadaniu kąt β wzorem $\omega_r^{pocz} = \omega_z \mathrm{ctg}\beta = \frac{v_0}{r}\mathrm{ctg}\beta$. Uzyskany elegancki wynik ukazuje nieoczekiwaną własność badanego ruchu: składowa z prędkości zależy tylko od danych początkowych v_0 i β oraz od lokalnego nachylenia pochylni, nie zależy zaś od kształtu pochylni na całej jej długości. Na przykład, jeśli pochylnia jest „progiem" łączącym dwie poziome półpłaszczyzny, to po przejściu kulki na inny poziom współrzędna v_z wraca do wartości początkowej zero, czyli tor kulki ulega przesunięciu równoległemu. Jeszcze bardziej zaskakujące jest rozwiązanie zbliżonego charakterem zadania 133 (patrz **Klub 44F** na poprzedniej stronie).

Jerzy B. BROJAN

Rozwiązanie zadania M 622. W 50 pytaniach dowiemy się o iloczyny $a_1a_2a_3$, $a_2a_3a_4$, …, $a_{50}a_1a_2$. Ich iloczyn da sześcian poszukiwanej wartości. Z drugiej zaś strony, jeżeli zadamy mniej niż 50 pytań, to nie będziemy znać iloczynu pewnej trójki, np. $a_1a_2a_3$. Zauważmy teraz, że dla układu, w którym $a_1 = a_3 = a_6 = a_9 = \ldots = a_{48} = 1$, a pozostałe liczby są równe -1, wszystkie iloczyny $a_ia_{i+1}a_{i+2}$ są równe 1 z wyjątkiem a_1, a_2, a_3. Te same odpowiedzi na pytania otrzymamy dla układu samych jedynek, mimo że iloczyny obu tych układów są różne.

Rozwiązanie zadania M 623. Suma długości prostopadłych rzutów wysp na brzeg jest nie większa niż 400 m. Stąd dla dowolnego punktu na brzegu w odległości co najwyżej 200 m od niego leży na tym brzegu drugi punkt nie należący do rzutu prostopadłego żadnej z wysp. Należy przepłynąć przy brzegu do tego punktu, a dalej prostopadle na drugi brzeg.

Rozwiązanie zadania M 624. Przypuśćmy, że samochód ma w baku ilość paliwa pozwalającą na przejechanie całej obwodnicy i że przejeżdża ją zaczynając od dowolnej stacji. Załóżmy ponadto, że zbiera z każdej mijanej stacji całe paliwo. Spośród wszystkich stacji wybierzmy taką, przy podjechaniu do której samochód ma najmniej paliwa w baku – oznaczmy tę ilość przez x. Przypuśćmy teraz, że samochód rozpoczyna podróż od tej właśnie stacji, mając w chwili startu x paliwa. Samochód ten objedzie całą trasę i przy podjeździe do każdej stacji będzie miał co najmniej x paliwa. Stąd wniosek, że może objechać całą trasę, gdy będzie podstawiony do tej stacji z pustym bakiem.

Rozwiązanie zadania F 828. Masa atomu chloru jest równa $m = \mu/N_A$, gdzie N_A – stała Avogadro. Można przyjąć, że jon chloru jest uwięziony w sześcianie o boku a. Z zasady nieoznaczoności możemy oszacować minimalną prędkość jonów chloru

$$mVa \approx \hbar,$$

stąd

$$V \approx \frac{\hbar N_A}{\mu a} \approx 3\ \mathrm{m/s}.$$

Regulamin

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.

2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 6 i 7 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n+3$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1992 upływa 28 lutego 1993). W numerze $n+4$ podane są szkicowe rozwiązania.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.

8. Prace powinny być samodzielne. Jednobrzmiące rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest oceniane w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przyślą zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).

12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. **4**), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.

13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. **10**, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy **44** punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44**.

14. Po zgromadzeniu **44** punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość **44** zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44** daje tytuł **Weterana Klubu 44**.

16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy uzbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.

17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów co najwyżej trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy wykona ruch w górę.

18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka (kilkadziesiąt nazwisk).

19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na spotkania **Klubu 44**.

20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możność zmian regulaminu.

Kolejny „sezon ligowy" minął. I to długi sezon, bo półtoraroczny. Dwa lata temu, gdy była pora na coroczne omówienie, *Delta* w ogóle nie wychodziła. Cieszymy się, że udało nam się przeżyć ten kolejny „zakręt historii".

Czas jakiś temu zapraszaliśmy Czytelników do dyskusji (zainicjowanej przez pana **Henryka Kornackiego**) na temat zasady ustalania „współczynnika trudności" (WT), jego wad i zalet. Jako jedyny zabrał głos pan **Przemysław Gadziński** (Środa Śl.) proponując utrzymanie dotychczasowego wzoru $WT = 4 - 3S/N$, z tą tylko różnicą, by N oznaczało maksymalną wartość dotychczasowego N z ostatnich sześciu miesięcy. (Na przykład, jeśli n_1 osób przysłało rozwiązania zadań sierpniowych, n_2 osób przysłało rozwiązania zadań wrześniowych, itd., aż do stycznia, to ustalając współczynnik trudności w styczniu należałoby przyjąć $N = \max(n_1, \ldots, n_6)$.) Cytujemy słowa autora propozycji: „...taki WT będzie lepiej uwzględniać różnice między trudnością zadań z kilku numerów; pozytywną cechą tego sposobu liczenia jest też mała zmiana i niewiele większe skomplikowanie w stosunku do dotychczasowego systemu". Brzmi nieźle. Co o tym myślą inni Czytelnicy?

Jak zwykle, drukujemy regulamin ligi. Odnotowujemy jedną zmianę: w dotychczasowym brzmieniu regulaminu, w punkcie 19, była mowa o „corocznych spotkaniach". Słówko „corocznych" z żalem wykreślamy, i mamy nadzieję, że ten punkt nie okaże się całkowitą fikcją, że jeszcze kiedyś uda nam się spotkanie **Klubu 44** zorganizować. Trudności, jakie w tej chwili stają nam na przeszkodzie, są tak banalne, że nie warto ich nazywać po imieniu (a i *słuchać hadko*). Ale może dożyjemy pomyślniejszych czasów...

Teraz o zadaniach („okres sprawozdawczy" obejmuje piętnaście numerów!). Jak zwykle, uczestnicy ligi znajdują dowody, przykłady, konstrukcje ogólniejsze lub bardziej pomysłowe od naszych rozwiązań.

Zadanie 194. [Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ tylko skończenie wiele par liczb całkowitych (x, y) spełnia równanie $x^n + (x+1)^n = y^{2n} + (y+1)^{2n}$] (współczynnik trudności $WT = 4{,}00$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 0$). Ten rekord jest już nie do pobicia; nikt z Czytelników nie przysłał nawet częściowego rozwiązania. Co ciekawsze: nie wiemy, czy istnieją trójki liczb naturalnych (n, x, y) spełniające dane równanie i takie, że $\max(|x|, |y|) > 1$; nie zna odpowiedzi na to pytanie ani pan **M. Mazur**, który zadanie zaproponował, ani nikt z indagowanych przez nas matematyków.

Zadanie 195. [Dwie n-kartowe talie stasowano razem. Ile, średnio, kart trzeba odkryć, aby ujrzeć dwie identyczne?] ($WT = 2{,}80$; $LPR = 2$). Dwa poprawne rozwiązania, nie różniące się od naszego, podali: **P. Gadziński i A. Langer**.

Zadanie 202 . [Nierówność cykliczna $\sum a_k \leq \sum a_k^2$, gdy $a_k = x_k/x_{k+1}$, $k = 1, \ldots, n$, $x_{n+1} = x_1$] ($WT = 1{,}57$; $LPR = 25$). Zadanie nietrudne, dobrych rozwiązań dużo. Czytelnicy podają uogólnienie: $\sum a_k^p \leq \sum a_k^q$, jeśli $0 \leq p \leq q$ (**A. Bonk, A. Czornik** – dla p, q naturalnych; **P. Kumor** – dla p, q rzeczywistych).

Zadanie 203. [Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną n, dla której istnieje taki 1990-elementowy zbiór $A \subset \{1,\ldots,n\}$, że $(x \in A \Rightarrow 2x \notin A)$] ($WT = 2,00$; $LPR = 15$). Pan **A. Bonk** atakuje problem w postaci ogólnej: oznaczając przez $f(n)$ maksymalną moc zbioru $A \subset \{1,\ldots,n\}$ o podanej własności, znajduje wzór rekurencyjny

$$f(n) - f(n-1) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n = 2^k m, \ \ k, m \text{ nieparzyste}, \\ 1 & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases}$$

a stąd wzór ogólny

$$f(n) = n - \sum_{j=1}^{\infty} [\frac{1}{2} + 4^{-j} n]$$

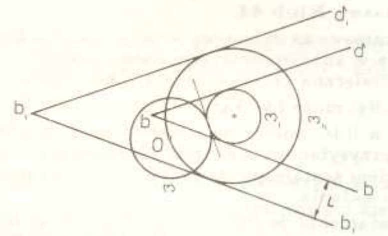
(ta suma ma tylko skończenie wiele niezerowych składników). Najmniejsze n, dla którego $f(n) \geq 1990$, to $n = 2987$.

Zadanie 206. [Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną $n \geq 2$, dla której zapis dziesiętny liczby 44^n zaczyna się i kończy dwiema czwórkami] ($WT = 2,66$; $LPR = 10$). Pan **J. Ciach** rozważa analogiczne zagadnienie dla dłuższych serii czwórek; zauważa, że na końcu nigdy nie pojawią się trzy czwórki oraz znajduje, dla $k = 3$ i $k = 4$, najmniejszą liczbę n, dla której liczba 44^n ma na początku k czwórek, a na końcu – dwie. Liczby te wynoszą, odpowiednio, 13441 oraz 115391.

Zadanie 208. [$f_1(x) = \sin x$, $f_{n+1}(x) = (\sin x)^{f_n(x)}$; $\lim\limits_{x \to 0+} f_n(x) = ?$] ($WT = 3,16$; $LPR = 7$). Stosunkowo duża wartość WT wynika z dużej liczby nadesłanych rozwiązań, w tym wszelako wielu błędnych. Autorami poprawnych rozwiązań są: **P. Gadziński, Ł. Wiechecki, M. Zając, J. Ciach, K. Pióro, T. Wietecha, K. Zapisek**.

Zadanie 211. [Skonstruować trójkąt o minimalnym obwodzie, mający dwa boki zawarte w dwóch danych półprostych p, q o początku P, a trzeci bok styczny do koła ω zawierającego P] ($WT = 3,28$; $LPR = 3$). Konstrukcje zgrabniejsze od podanej przez nas znaleźli panowie **J. Olszewski** i **K. Pióro**.

Oto pierwsze z tych rozwiązań: Wystarczy znaleźć okrąg ω' styczny do p i q oraz styczny zewnętrznie do ω; nietrudno zauważyć (por. np. *Delta* 2/1991), że wspólna styczna do okręgów ω i ω' będzie prostą zawierającą trzeci bok szukanego trójkąta. Oznaczmy środek i promień okręgu ω przez O i r. Rysujemy półproste p' i q' o wspólnym początku P', biegnące równolegle do półprostych p i q, w odległości r od nich i tworzące kąt zawierający p i q w swoim wnętrzu.



W kąt (p', q') wpisujemy okrąg ω'' przechodzący przez punkt O (są dwa takie okręgi; bierzemy większy z nich). Środek okręgu ω'' będzie jednocześnie środkiem okręgu ω'.

(Autorem trzeciego rozwiązania, bardziej rachunkowego, jest pan **K. Jedziniak**.)

Zadanie 213. [Czy iloczyn pochodnych dwóch funkcji zawsze jest pochodną pewnej funkcji?] ($WT = 3,60$; $LPR = 4$). Kontrprzykłady (identyczne z naszym lub bardziej zawiłe) znaleźli: **P. Kumor, H. Kornacki, P. Gadziński, A. Krzysztofowicz**.

Zadanie 217. [$f(t) = t^2(t^2+1)^{-2}$; znaleźć maksimum $f(w) + f(x) + f(y) + f(z)$ przy warunku $w + x + y + z = 2$ $(w, x, y, z > 0)$] ($WT = 3,54$; $LPR = 2$). Poprawne rozwiązania (nie mniej uciążliwe od naszego) podali: **P. Gadziński** i **M. Kasperski**.

Zadanie 219. [$x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{k}\right)^n$; czy ciąg (x_n/n) jest zbieżny?] ($WT = 3,52$; $LPR = 3$). Dobre rozwiązania: **J. Ciach, M. Kasperski, P. Gadziński**. Oto piękne rozwiązanie, które podał pan **J. Ciach**: Ustalmy $m \in \mathbf{N}$; oznaczmy przez q i r iloraz i resztę z dzielenia n przez m. Mamy oszacowania:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^n = \sum_{k=1}^{q} + \sum_{k=q+1}^{2q} + \ldots + \sum_{k=(m-1)q+1}^{mq} + \sum_{k=mq+1}^{mq+r} \begin{cases} \leq q\left(1 - \frac{1}{q}\right)^n + q\left(1 - \frac{1}{2q}\right)^n + \ldots + q\left(1 - \frac{1}{mq}\right)^n + r \\ \geq \qquad q\left(1 - \frac{1}{q}\right)^n + \ldots + q\left(1 - \frac{1}{(m-1)q}\right)^n \end{cases}$$

Stąd (pisząc $q = q(n)$, $r = r(n)$):

$$\frac{q(n)}{n} \sum_{j=1}^{m-1} \left(1 - \frac{1}{jq(n)}\right)^n \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{q(n)}{n} \sum_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{jq(n)}\right)^n + \frac{r(n)}{n}.$$

Przy ustalonym m mamy: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q(n)}{n} = \frac{1}{m}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r(n)}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{jq(n)}\right)^n = \mathrm{e}^{-m/j}$.

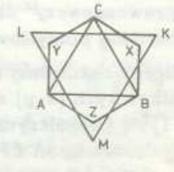
Oznaczając przez α i β granicę dolną i granicę górną ciągu (x_n/n) otrzymujemy nierówności

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} \mathrm{e}^{-m/j} \leq \alpha \leq \beta \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \mathrm{e}^{-m/j}.$$

Gdy teraz $m \to \infty$, skrajne wyrażenia dążą do wspólnej granicy $\lambda = \int_0^1 \mathrm{e}^{-1/t} \mathrm{d}t$. Zatem $\lambda = \alpha = \beta = \lim(x_n/n)$.

Zadanie 220. [Trójkąt ABC ma kąty α, β, γ; P, Q, R to punkty styczności koła wpisanego z brzegiem ABC; trójkąt PQR ma kąty $\alpha', \beta', \gamma' \Rightarrow \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \leq \sin\alpha' \sin\beta' \sin\gamma'$.] ($WT = 1,67$; $LPR = 14$). Uogólnienia: **J. Ciach** zauważa, że teza jest słuszna, gdy P, Q, R są rzutami dowolnego punktu $M \in \triangle ABC$ na boki trójkąta; **P. Gadziński** pokazuje, że teza jest słuszna, dla dowolnych liczb $\alpha \geq \beta \geq \gamma > 0$ i $\alpha' \geq \beta' \geq \gamma' > 0$ takich, że $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma' = \pi$, $\alpha \geq \alpha'$, $\gamma \leq \gamma'$.

Zadanie 221. [Część (b): Dać przykład ściśle wypukłego środkowo-symetrycznego zbioru w $\mathbf{R}^3$ oraz wpisanego weń środkowo-symetrycznego niezdegenerowanego wielościanu tak, by środki symetrii obu figur nie pokrywały się] ($WT = 3,38$; $LPR = 4$). Przykład **P. Gadzińskiego**: Bierzemy trójkąty foremne ABC i KLM, leżące w jednej płaszczyźnie π i usytuowane, jak na rysunku. Trójkąt ABC uzupełniamy do sześciokąta foremnego $AZBXCY$. Trójkąt XYZ rzutujemy prostopadle na dwie płaszczyzny π' i π'', równoległe do π i leżące w jednakowej odległości od π, po różnych jej stronach; otrzymujemy trójkąty $X'Y'Z'$ i $X''Y''Z''$.



Niech V będzie najmniejszym wielościanem wypukłym zawierającym wszystkie nazwane punkty; przez W oznaczmy ośmiościan $ABCX'Y'Z'$. Środki symetrii wielościanów V i W nie pokrywają się. Wystarczy „nadmuchać" ściany wielościanu V, aby otrzymać zbiór ściśle wypukły, spełniający (wraz z wielościanem W) warunki zadania.

Inne dobre przykłady (bardziej skomplikowane) podali: **H. Kornacki, J. Olszewski, W. Kopczuk**.

Po 120 zadaniach i ponad sześcioletnim okresie istnienia **ligi fizycznej** pora na pewne podsumowanie. Tym bardziej że w okolicach zadania 110 nastąpiło przekazanie pałeczki redagującego ligę.

Przez ligę przewinęło się dotychczas ponad dwustu uczestników, wśród nich zaledwie trzy (!) panie. Tytuł Członka **Klubu 44F** uzyskało dziewiętnastu uczestników (dokładniej: osiemnastu uczestników i jedna uczestniczka), w tym trzech dwukrotnie, dwóch zaś trzykrotnie – uzyskując tytuł Weterana.

Wśród uczestników połowę stanowią uczniowie (około 40% wszystkich uczestników) oraz studenci – uczelni technicznych, uniwersytetów (fizyka, informatyka, matematyka), zdarzył się też student medycyny. W drugiej połowie – raczej nieskorej do bliższego ujawniania się – są inżynierowie, nauczyciele, a nawet pracownicy naukowi.

Najwytrwalsi uczestnicy pozostawali wierni lidze przechodząc ze szkoły na uczelnię lub uzyskując dyplom akademicki. Obserwowanie ich rozwoju to rzecz ciekawa sama w sobie. Cieszy też, gdy uczestnik ligi zostaje laureatem Olimpiady Fizycznej – były dwa takie przypadki. Swoistym fenomenem jest jeden z Weteranów – technik geodeta, który erudycją matematyczną mógłby zaćmić większość inżynierów i nie tylko inżynierów ...

Na początku, gdy liga była czymś nowym, wielu próbowało swych sił w jednej czy dwóch seriach zadań i na tym poprzestawało – chociaż zdarzały się powroty, nawet po paru latach. W miarę upływu czasu ta tendencja słabła i obecnie przeważają wytrwali. Dopływ nowych uczestników gwałtownie zmalał – a i starych się wielu wykruszyło – pod koniec 1989 roku, gdy opóźnienie wydawnicze *Delty* zdarzało się przekraczać nawet regulaminowy okres na nadsyłanie rozwiązań (wtedy wydłużono ten okres z dwóch do trzech miesięcy).

Uregulowanie spraw wydawniczych już nic potem nie pomogło – liczba nadsyłanych prac pozostała na bardzo niskim (niekiedy nawet jednocyfrowym) poziomie. Nie spotkały się też z liczniejszym odzewem zadania, do rozwiązania których można wprząc komputer (ale dadzą się rozwiązać i bez komputera). Zadania takie pojawiają się poczynając od numeru 9/1989. Liczymy, że rozwój komputeryzacji – zwłaszcza szkół – przyczyni się do wzrostu zainteresowania nimi.

I gorąco zachęcamy, zwłaszcza młodzież: popróbujcie swych sił w lidze, przysyłajcie też pomysły, jak ligę uczynić bardziej atrakcyjną.

A teraz omówienie wybranych zadań.

Zadanie 92. [Równowaga układu dwóch ciał na prowadnicach] ($WT = 1,23$; $LPR = 9$). Na najwyższą ocenę rozwiązali je: **A. Borowski** (zauważył, że środek masy układu porusza się po elipsie), **P. Gworys, A. Sikorski, Dz. Lipniacki, R. Panowicz, P. Perkowski**. Trzej ostatni rozpatrywali energię potencjalną układu ciał.

Zadanie 94. [Rakieta o zmiennej masie] ($WT = 2,80$; $LPR = 4$). Dobre rozwiązania analityczne przysłali **Dz. Lipniacki** (bez upraszczającego założenia o stałości przyspieszenia ziemskiego wzdłuż toru rakiety), **P. Perkowski** i **A. Sikorski**. Iteracyjnie rozwiązywał **A. Borowski**, natomiast **P. Perkowski** zastosował komputer do numerycznego rozwiązania równania różniczkowego (faktycznie była to druga metoda rozwiązywania) i do sporządzenia wykresów.

Zadanie 97. [Wodne planety] ($WT = 2,97$; $LPR = 1$) jest przykładem zadania „otwartego", w którym samemu trzeba określić, jakie mechanizmy i procesy odgrywają decydującą rolę. Tego typu zadania na ogół nastręczają trudności. Jedyne dobre rozwiązanie nadesłał **P. Gworys**.

Zadanie 98. [Ruch krążka na lodowisku] ($WT = 3,06$; $LPR = 2$). Zadanie nie cieszyło się popularnością. **L. Motyka** podał 3 tory spełniające warunki zadania, **A. Sikorski** – 10. Nikt nie posłużył się komputerem; jedynie **P. Perkowski** podał program sprawdzający poprawność rozwiązań, ale go – niestety – nie zastosował.

Zadanie 105. [Kołysanie statku przez fale] ($WT = 3,76$; $LPR = 0$). Aż dziwne, że na tak proste zadanie nie nadeszło ani jedno satysfakcjonujące rozwiązanie (pewnie dlatego, że nietypowe). W rezultacie uzyskało ono najwyższą wartość WT.

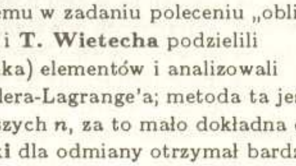
Zadanie 106. [Drgania własne zawieszonego swobodnie łańcuszka] ($WT = 2,74$; $LPR = 3$). **Dz. Lipniacki** zauważył, że problem daje się opisać równaniem różniczkowym, którego rozwiązaniem jest następujące wyrażenie na amplitudę drgań łańcuszka w odległości z od dolnego końca:

$$x(z) = \text{const} \cdot J_0(2\omega\sqrt{z/g}),$$

gdzie J_0 jest funkcją Bessela. Ponieważ w górnym końcu łańcuszka amplituda drgań jest równa zeru, wyznaczenie częstotliwości drgań sprowadza się do znalezienia miejsc zerowych funkcji J_0 (są podane w specjalistycznych tablicach). Rozwiązanie takie jest bardziej eleganckie od opublikowanego w *Delcie* 12/1990, choć odczytywanie wartości z tablic niezupełnie odpowiada podanemu w zadaniu poleceniu „obliczyć numerycznie". **P. Perkowski** i **T. Wietecha** podzielili łańcuszek na n (w praktyce kilka) elementów i analizowali ich ruch stosując równania Eulera-Lagrange'a; metoda ta jest bardzo pracochłonna dla większych n, za to mało dokładna dla niezbyt dużych n. **A. Sikorski** dla odmiany otrzymał bardzo dobre wyniki doświadczalnego pomiaru okresu dwóch pierwszych drgań – znacznie lepsze od obliczonych.

Zadanie 108. [Spadający taternik] ($WT = 2,20$; $LPR = 4$) było także niekonwencjonalne. Zasadniczo dobre rozwiązania przysłali **P. Gworys, L. Motyka, T. Wietecha** i **A. Sikorski**, który jako jedyny rozpatrywał dynamikę „szarpnięcia" (patrz *Mała Delta* w numerze 7/1990). Żadne jednak z tych rozwiązań nie uwzględniło pracy (biernej) sił tarcia liny o taternika B podczas tego szarpnięcia.

Zadanie 115. [Elektryczna metoda pomiaru czasu przelotu pocisku] ($WT = 2,40$; $LPR = 5$). W kilku rozwiązaniach zastosowano odmienny od naszego (*Delta* 7/1991) obwód – jak na schemacie obok. Zamiast rozładowywania kondensatora przez opornik mamy tu jego ładowanie w czasie, jaki upływa między otwarciem klucza 1 a otwarciem klucza 2.



Zadanie 120. [Maksymalna prędkość kątowa wirującej kropli] ($WT = 3,15$; $LPR = 1$). Znalezienie ścisłego rozwiązania jest bardzo trudne i dlatego w treści zadania zamieszczona była sugestia, by przeprowadzić półjakościową, orientacyjną ocenę wyniku. W dwóch rozwiązaniach wykorzystano tę radę, ale tylko jedno z nich – **A. Sikorskiego** jest satysfakcjonujące. Umiejętność przybliżonej oceny danej wielkości, gdy nie można jej obliczyć dokładnie, jest czymś bardzo ważnym. Tym większa szkoda, że tak rzadko się ją spotyka u uczestników ligi.