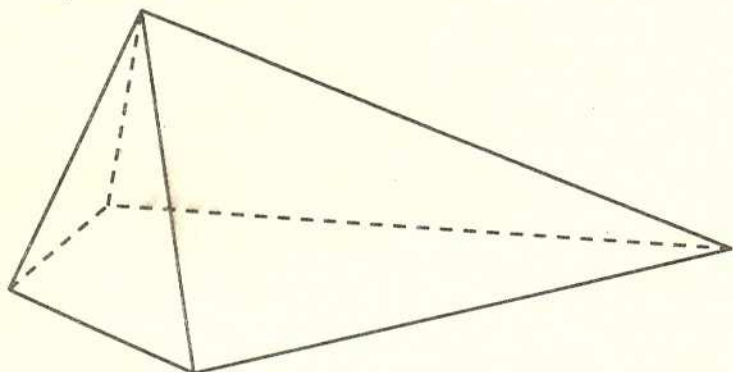


Epsilonowe zadania na Święta

1. Ile przekątnych ma przedstawiony na poniższym rysunku wielościan?



Uwaga. Przez przekątną wielościanu rozumiemy odcinek łączący dwa wierzchołki wielościanu, nie zawierający się w żadnej z jego ścian.

2. Wykazać, że $\sin 1^\circ$ jest liczbą niewymierną.

3. Udowodnić (bez pomocy kalkulatora), że

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

4. Znaleźć część wspólną czworościanu foremnego i jego obrazu w symetrii środkowej względem środka wysokości czworościanu.

5. Do n zaadresowanych kopert włożono losowo n listów, do każdej koperty po jednym liście. Przez p_i oznaczamy prawdopodobieństwo tego, że dokładnie i listów trafi do właściwych kopert. Wykazać, że jeśli $n \geq 100$,

$$\text{to } p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \leq \frac{\ln \sqrt{\pi n}}{2\pi n} e^{-\pi n}.$$

Uwaga. Dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka liczba $\Theta \in (0, 1]$, że $n! = e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\Theta/12n}$ (wzór ten nosi nazwę wzoru Stirlinga).

6. Obliczmy $\int \operatorname{tg} x \, dx$. Całkując przez części, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg} x \, dx &= \int \frac{1}{\cos x} \sin x \, dx = \frac{-\cos x}{\cos x} - \int \frac{-\sin x}{\cos^2 x} (-\cos x) \, dx = \\ &= -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -1 + \int \operatorname{tg} x \, dx \end{aligned}$$

i po dokonaniu redukcji mamy $0 = -1$, czyli $1 = 0$. Gdzie jest błąd?

Encyclopaedia Britannica w XV wydaniu umieszcza informację o Stefanie Banachu. Rozpoczyna się owa notka następująco: **Banach, Stefan** (b. March 30, 1892, Kraków, Austria-Hungary – d. Aug. 31, 1945, Lvov, Ukrainian S.S.R.), *Soviet mathematician who founded modern functional analysis and...*

Potem w tekście jest jeszcze dwukrotnie wspomniany „Lvov” jako miejsce pracy Banacha, o Polsce ani słowa.

Zapewne ktoś redaktorom zwrócił uwagę na – mówiąc delikatnie – minięcie się z prawdą, bo w następnym wydaniu notka została „gruntownie” poprawiona. Oto początek (reszta nie uległa zmianie):

Banach, Stefan (b. March 30, 1892, Kraków, Pol.– d. Aug. 31, 1945, Lvov, Ukrainian S.S.R), *mathematician who founded modern functional analysis and...*

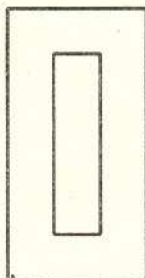
Czytelnik nie bez podstaw wywnioskuje więc, że Banach urodził się w Pol., ale matematykiem był radzieckim – no bo jakim mógł być innym na podstawie tego tekstu, skoro pracował w mieście Lvov?

Na marginesie dodajmy, że XV wydanie encyklopedii przedstawia Alberta Einsteina: „German-American physicist”, a Alfreda Tarskiego: „Polish-born American mathematician” (porównując oba hasła dochodzimy do wniosku, że Tarski urodził się w Polsce, lecz matematykiem został w USA) – ale np. Eulera: „Swiss mathematician and physicist” (przypominamy, że Euler przez dużą część swego życia pracował w Rosji).

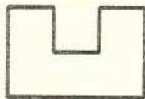
Zachodzi pytanie: czy dzieje się to według zasady typu: „O Litwie, dalibógże!, mniej wiem niż o Chinach” czy też jest to efekt sympatii do Polski? A może jedno i drugie?

7. Oto dwa rzuty pewnej bryły:

z góry



i z boku.



Co to za bryła?

Uwaga. Na rzucie liniami ciągłymi oznacza się krawędzie widoczne, liniami przerywanymi – krawędzie niewidoczne.

Wśród osób, które nadesłały **EPSILONOWI** (w ciągu miesiąca od ukazania się tego numeru *Delty*) pełne rozwiązania wszystkich siedmiu zadań, rozlosujemy nagrody.

Prawidłowe rozwiązania podamy w **EPSILONIE** za dwa miesiące.

Życzymy miłej zabawy!